

RENDICONTI

DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 aprile 1916.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni di Ribaucour di una classe di superficie.* Nota del Socio L. BIANCHI.

1. Le formule stesse che ho utilizzato in due Note precedenti ⁽¹⁾ per trovare le trasformazioni di Ribaucour, per involuppi di ipersfere, dei sistemi ortogonali di Guichard-Darboux, si adattano, con lievi modificazioni, alle ricerche analoghe per le ordinarie superficie isolate, e più in generale per le ipersuperficie dell' S_n euclideo, che siano definite da corrispondenti proprietà delle linee di curvatura.

Cominciando dal caso ordinario, si tratterà qui delle superficie caratterizzate dalla seguente proprietà delle loro linee di curvatura (u_1, u_2) : *per una conveniente scelta dei parametri u_1, u_2 , nella espressione del loro ds^2*

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2,$$

sussiste fra i coefficienti la relazione

$$(a) \quad H_1^2 \pm H_2^2 = \text{cost},$$

che corrisponde appunto a quella caratteristica dei sistemi ortogonali di Guichard-Darboux.

⁽¹⁾ Ved. i fascicoli del marzo 1916. La seconda di queste Note verrà qui citata come *Nota (B)*.

Si sa che appartengono alla classe (a) le superficie a curvatura costante, positiva o negativa, e le loro superficie parallele; ma la classe stessa (a) è molto più ampia, precisamente come la classe delle generali superficie isoterme confrontata con quella delle superficie a curvatura media costante.

Come naturale estensione troveremo nello spazio euclideo S_{n+1} una classe di ipersuperficie V_n a linee di curvatura coordinate ⁽¹⁾, nella cui espressione del ds^2 , riferito alle linee di curvatura (u_1, u_2, \dots, u_n) ,

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \dots + H_n^2 du_n^2,$$

sussiste fra i coefficienti H_i^2 la relazione analoga alla (a)

$$(a') \quad \varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \dots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cost} \\ (\varepsilon_i = \pm 1),$$

dove ciascuna ε è l'unità, positiva o negativa.

Fra queste ipersuperficie se ne ha poi una classe, che diremo *speciale*, caratterizzata da ciò: che la stessa relazione (a') ha luogo anche per l'immagine sferica delle linee di curvatura. Queste ipersuperficie V_n speciali tengono nell' S_{n+1} il posto delle superficie a curvatura costante e delle loro parallele del caso $n=2$, e ne costituiscono la generalizzazione negli iperspazii ⁽²⁾.

Per le nostre ipersuperficie V_n generali esistono trasformazioni di Ribaucour (per involuppi di ipersfere) che corrispondono esattamente alle trasformazioni D_m di Darboux delle superficie isoterme del caso $n=2$, e ulteriormente, per la classe *speciale*, alle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che si deducono dalla inversione dei teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche di rotazione.

2. Trattiamo dapprima il caso $n=2$, e riferiamoci alle formole di rappresentazione sferica, adottando la notazione dei doppi indici, per migliore confronto colle formole del caso generale.

Abbiasi una superficie Σ , riferita alle sue linee di curvatura (u_1, u_2) , e sia

$$(1) \quad ds'^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico, mentre con

$$(2) \quad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2$$

⁽¹⁾ Cfr. le mie *Lezioni*, vol. I, pag. 481.

⁽²⁾ È noto che, per $n > 2$, non esistono nell' S_{n+1} ipersuperficie V_n a curvatura riemanniana costante, salvo le ipersfere. Era quindi naturale di avere la generalizzazione delle superficie a curvatura costante in altro senso, e quello indicato nel testo sembra il più opportuno.

indichiamo quello della superficie stessa. Introdotte le *rotazioni*

$$\beta_{12} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2},$$

le equazioni caratteristiche per $h_1, h_2, \beta_{12}, \beta_{21}$, sono le seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21} h_2, & \frac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{12} h_1, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + h_1 h_2 = 0. \end{cases}$$

Scriviamo anche le equazioni fondamentali cui soddisfano i coseni di direzione X_1, X_2, X_3 dell'asse Ox rispetto ai tre spigoli del triedro principale:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = -\beta_{21} X_2 - h_1 X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} = \beta_{12} H_2 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} = \beta_{21} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} = -\beta_{12} X_1 - h_2 X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} = h_1 X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} = h_2 X_2, \end{cases}$$

che valgono colle analoghe per gli altri due assi. Queste formole (3), (4) sono comuni a tutte le superficie coll'immagine sferica (1) delle linee di curvatura. Una qualunque di queste resta individuata da una coppia di funzioni (H_1, H_2) che soddisfino alle equazioni

$$(5) \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12} H_1,$$

dopo di che le formole in termini finiti per Σ si hanno con quadrature:

$$(6) \quad x = \int (H_1 X_1 du_1 + H_2 X_2 du_2), \text{ ecc.,}$$

e il ds^2 è dato appunto dalla (2).

3. Veniamo alla classe particolare di superficie che soddisfano alla condizione (a), ossia

$$(7) \quad H_1^2 + \varepsilon H_2^2 = \text{cost.} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Dalla derivazione di questa e dalle (5) si ottiene il sistema

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial u_1} = -\varepsilon \beta_{12} H_2, & \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2 \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12} H_1, & \frac{\partial H_2}{\partial u_2} = -\varepsilon \beta_{21} H_1, \end{cases}$$

e, come unica condizione d'integrabilità.

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} = 0.$$

La ricerca delle superficie della classe (7) dipende quindi, in primo luogo, da quella dei sistemi sferici ortogonali (u_1, u_2) per i quali si verificano le equazioni

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21} h_2, \quad \frac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{12} h_1 \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + h_1 h_2 = 0, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} = 0. \end{array} \right.$$

Applicando i noti teoremi generali, si vede che questo sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da *quattro funzioni arbitrarie* (cfr. n. 7).

Scelta una qualunque di queste soluzioni $(h_1, h_2, \beta_{12}, \beta_{21})$, il sistema *ai differenziali totali* (8) per H_1, H_2 è completamente integrabile. Esso possiede inoltre l'integrale quadratico (7), sicchè possono scegliersi ad arbitrio i valori iniziali di H_1, H_2 , per un sistema iniziale di valori di u_1, u_2 .

In particolare, quando sia $\varepsilon = -1$, si potrà dare ad arbitrio alla costante del secondo membro nella (7) un valore positivo, negativo o nullo, nel quale ultimo caso la superficie sarà isoterma. Dunque: *le superficie della classe $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost}$ hanno a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura colle superficie isoterme.*

4. Precisiamo meglio il risultato ora ottenuto con una costruzione geometrica effettiva.

Essendo qui $\varepsilon = -1$, indi

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} = \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2},$$

possiamo porre, indicando con θ una conveniente funzione di u_1, u_2 ,

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2}.$$

Sostituendo nel sistema lineare omogeneo ai differenziali totali (8), si vede che due soluzioni particolari sono

$$\begin{array}{ll} H_1 = e^\theta, & H_2 = e^\theta \\ H_1 = e^{-\theta}, & H_2 = -e^{-\theta}, \end{array}$$

e, per la (6), le corrispondenti superficie, che diremo S, \bar{S} , sono date dalle formole

$$S) \quad x = \int (e^0 X_1 du_1 + e^0 X_2 du_2)$$

$$\bar{S}) \quad \bar{x}^* = \int (e^{-0} X_1 du_1 - e^{-0} X_2 du_2), \text{ ecc.,}$$

che definiscono manifestamente una coppia di superficie isoterme *trasformate di Christoffel*. Ma la soluzione generale delle (8) si compone linearmente colle due particolari, così:

$$H_1 = ae^0 + be^{-0} \quad , \quad H_2 = ae^0 - be^{-0} \\ (a, b \text{ costanti}),$$

e per le coordinate ξ, η, ζ del punto mobile sulla corrispondente superficie Σ avremo quindi

$$\xi = ax + b\bar{x}^* \quad , \quad \eta = ay + b\bar{y}^* \quad , \quad \zeta = az + b\bar{z}^* ,$$

nelle quali formole potremo intendere anche che sia $a + b = 1$, sostituendo ad S, \bar{S} due superficie omotetiche. Dopo ciò, possiamo formulare la costruzione cercata:

Per avere la più generale superficie Σ con $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost}$, prendasi una coppia di superficie isoterme S, \bar{S} trasformate di Christoffel l'una dell'altra, e si dividano tutti i segmenti $P\bar{P}$, che riuniscono le coppie di punti corrispondenti P, \bar{P} , secondo un rapporto costante; il punto M di divisione descrive la superficie domandata.

Notevole è il caso particolare che S, \bar{S} siano due superficie parallele a curvatura media costante; allora la superficie Σ è una qualunque delle parallele, fra le quali la media è a curvatura costante positiva (Bonnet).

Un altro caso da osservarsi è quello in cui S è una qualunque superficie ad area minima, indi \bar{S} la sfera di Gauss della rappresentazione.

5. Facciamo ora nella (7), $\varepsilon = \pm 1$, indi

$$ds^2 = a^2(\cos^2 \omega du_1^2 + \sin^2 \omega du_2^2) \quad (a \text{ cost}),$$

e ponendo

$$u_1 = \alpha + \beta \quad , \quad u_2 = \alpha - \beta ,$$

avremo

$$ds^2 = a^2(d\alpha^2 + 2\cos^2 \omega d\alpha d\beta + d\beta^2).$$

Le linee (α, β) tracciano sulla superficie una rete di Tchebychef (ved. *Lezioni*, vol. II, pag. 401), di cui le bisettrici sono le linee di curvatura. La proprietà è manifestamente invertibile, e possiamo dire:

Le superficie con $H_1^2 + H_2^2 = \text{cost}$ sono caratterizzate geometricamente dall'avere, per linee di curvatura, le bisettrici di una rete di Tchebychef.

Nel caso attuale, con $\varepsilon = +1$, possiamo porre

$$\beta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_2},$$

e la soluzione generale delle (8) è

$$H_1 = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad H_2 = -a \sin \theta + b \cos \theta,$$

che si compone linearmente colle due (immaginarie coniugate)

$$\begin{cases} H_1 = e^{i\theta}, & H_2 = ie^{i\theta} \\ H_1 = e^{-i\theta}, & H_2 = -ie^{-i\theta} \end{cases}$$

A queste ultime corrispondono sempre due superficie isoterme della classe, però questa volta immaginarie, con immagine sferica reale. La costruzione formulata al n. 4 rimane ancora valida; solo si osserverà, che per avere una superficie Σ reale, occorre prendere quel rapporto costante complesso, e di modulo $= 1$.

Anche qui le superficie pseudosferiche e le loro parallele formano una classe speciale, nella quale le due superficie isoterme coniugate sono parallele ed hanno per superficie media quella pseudosferica.

In generale, nella classe $H_1^2 \pm H_2^2 = \text{cost}$ le superficie a curvatura costante e le loro parallele sono contraddistinte da ciò: che la medesima relazione $h_1^2 \pm h_2^2 = \text{cost}$ ha luogo per l'immagine sferica.

6. Generalizziamo ora queste ricerche agli iperspazii, e consideriamo nell' S_{n+1} euclideo un'ipersuperficie V_n a linee di curvatura (u_1, u_2, \dots, u_n) coordinate e siano rispettivamente

$$(10) \quad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \dots + H_n^2 du_n^2$$

$$(10') \quad ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + \dots + h_n^2 du_n^2$$

i quadrati degli elementi lineari della V_n e della sua immagine ipersferica.

Alle formole (3) per la rappresentazione sferica vengono ora a sostituirsi le seguenti generali:

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial u_k} &= \beta_{ki} h_k \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} &= \beta_{ii} \beta_{ik} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i, k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + h_i h_k &= 0, \end{aligned} \right. \quad (i \neq k \neq l)$$

e pei coseni di direzione degli spigoli dell' $(n+1)^{esima}$ principale, che indichiamo con

$$X_1^{(r)}, X_2^{(r)}, \dots, X_n^{(r)}; \xi^{(r)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n),$$

dove con $\xi^{(r)}$ sono indicati quelli della normale all'ipersfera, abbiamo le formole corrispondenti alle (4):

$$(I^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k, \quad \frac{\partial X_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} X_{\lambda} - h_i \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = h_i X_i, \end{array} \right.$$

avendo ommesso, per brevità, l'indice superiore r .

Ogni ipersuperficie V_n colla data immagine ipersferica è individuata dai valori di H_1, H_2, \dots, H_n nella (10), valori che debbono soddisfare alle equazioni

$$(11) \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad (i \neq k).$$

La corrispondente ipersuperficie V_n si ha successivamente con quadrature dalle formole

$$(12) \quad x_r = \int (H_1 X_1^{(r)} du_1 + H_2 X_2^{(r)} du_2 + \dots + H_n X_n^{(r)} du_n) \\ (r = 0, 1, 2, \dots, n).$$

7. Applichiamo queste formole generali della rappresentazione ipersferica alla ricerca di quelle ipersuperficie V_n per le quali fra i coefficienti H_i nella (10) sussiste la relazione

$$(13) \quad \varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \dots + \varepsilon_n H_n^2 = c \text{ (costante)} \\ (\varepsilon_i = \pm 1).$$

Procedendo come nella Nota (B), da questa avremo, per derivazione,

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_{\lambda} \beta_{i\lambda} H_{\lambda};$$

poi, dalle corrispondenti condizioni d'integrabilità, le altre

$$\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_{\lambda} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0.$$

In riguardo dunque alla rappresentazione ipersferica delle ipersuperficie cercata, dovrà sussistere il sistema

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} h_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + h_i h_k = 0 \\ \varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_{\lambda} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0. \end{array} \right.$$

Coi soliti procedimenti [cfr. Nota (B)], si riconosce che questo è un sistema completamente integrabile, e la sua soluzione generale (h_i, β_{ik}) dipende da $n(n-1) + n = n^2$ funzioni arbitrarie.

Scelta una soluzione qualunque (h_i, β_{ik}) delle (II), il corrispondente sistema di equazioni ai differenziali totali nelle H_i ,

$$(II^*) \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_{\lambda} \beta_{i\lambda} H_{\lambda},$$

è a sua volta completamente integrabile, e possiede l'integrale quadratico (13). Esistono dunque le ipersuperficie cercate e dipendono da n^2 funzioni arbitrarie.

Vediamo, poi, che esiste ulteriormente la classe *speciale* in cui la stessa relazione (13) è soddisfatta nella rappresentazione ipersferica

$$\varepsilon_2 h_1^2 + \varepsilon_2 h_2^2 + \dots + \varepsilon_n h_n^2 = \text{cost.}$$

Poichè, invero, se associamo al sistema (II) le equazioni che ne seguono derivando,

$$\varepsilon_i \frac{\partial h_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_{\lambda} \beta_{i\lambda} h_{\lambda},$$

il nuovo sistema è ancora completamente integrabile.

Le ipersuperficie V_n della classe speciale dipendono, così, soltanto da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie, e sono geometricamente caratterizzate da questo che: *l'immagine delle loro linee di curvatura costituisce nell'ipersfera un sistema n^{plo} ortogonale di Guichard-Darboux.*

8. Passiamo alle trasformazioni di Ribaucour per le ipersuperficie V_n a linee di curvatura coordinate, dapprima in generale. Basterà scrivere le formule relative che si ottengono da quelle della Nota (B), applicando queste ultime al sistema $(n+1)^{\text{plo}}$ ortogonale individuato nell' S_{n+1} dalla V_n e dalle sue parallele.

Prendasi un sistema di $2n + 3$ funzioni

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; H'_1, H'_2, \dots, H'_n; w, \varphi, \psi,$$

che soddisfino al seguente sistema differenziale:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = (H_i + H'_i) \psi - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_{\lambda} - h_i w \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \quad \frac{\partial w}{\partial u_i} = h_i \gamma_i, \quad \frac{\partial \log \psi}{\partial u_i} = \frac{\gamma_i H'_i}{\varphi} \\ \frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} - (H_i + H'_i) \frac{\gamma_k}{\varphi} \right\} \cdot H'_k, \end{array} \right.$$

e, insieme, all'equazione in termini finiti

$$(III^*) \quad \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}^2 + w^2 = 2\varphi\psi.$$

Il sistema (III) è, in effetto, completamente integrabile, e possiede l'integrale quadratico

$$\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}^2 + w^2 - 2\varphi\psi = \text{cost},$$

sicchè basta prendere i valori iniziali delle $(\gamma_i, w, \varphi, \psi)$ in guisa che si annulli la costante del secondo membro. Dopo ciò, dalla soluzione scelta $(\gamma_i, H'_i, w, \varphi, \psi)$ resta individuata l'ipersuperficie V'_n , trasformata di Ribaucour della V_n , e corrispondente ai nuovi valori H'_i delle H_i , mediante le formole

$$(14) \quad x' = x - \frac{1}{\psi} \left(\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} X_{\lambda} + w \xi \right).$$

Si ha inoltre

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'_i = \frac{\gamma_i}{\varphi \psi} \left(\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} X_{\lambda} + w \xi \right) - X_i \\ \xi' = \frac{w}{\varphi \psi} \left(\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} X_{\lambda} + w \xi \right) - \xi, \end{array} \right.$$

e pei nuovi valori dei coefficienti h'_i e delle rotazioni β'_{ik} valgono le formole

$$(16) \quad h'_i = h_i - (H_i + H'_i) \frac{w}{\varphi}$$

$$(16^*) \quad \beta'_{ik} = \beta_{ik} - (H_k + H'_k) \frac{\gamma_i}{\varphi}.$$

9. Applicando queste formole generali, passiamo ora a dimostrare in particolare:

Ogni ipersuperficie V_n della classe (13),

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} H_{\lambda}^2 = c,$$

possiede ∞^{2n} ipersuperficie V'_n trasformate di Ribaucour e della medesima classe $\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} H_{\lambda}'^2 = c$.

Per questo basta procedere come nella Nota (B), ed aggiungere alle equazioni generali (III) di trasformazione le seguenti:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} H_{\lambda}'^2 = c, \quad \varepsilon_i \frac{\partial H_i'}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \beta'_{i\lambda} H_{\lambda}',$$

le quali ultime provengono dalla prima per derivazione. Si forma così un sistema misto ai differenziali totali, che è completamente integrabile, onde la sua soluzione generale contiene $2n + 1$ costanti arbitrarie. Ma una di queste, come costante moltiplicativa in $\gamma_i, w, \varphi, \psi$, non ha [secondo la (14)] influenza sull'ipersuperficie V'_n trasformata, e restano pertanto le $2n$ costanti dell'enunciato del teorema.

Il risultato ottenuto vale anche, naturalmente, per le ipersuperficie V_n della classe speciale

$$\varepsilon_1 h_1^2 + \varepsilon_2 h_2^2 + \dots + \varepsilon_n h_n^2 = a \text{ costante}.$$

Ma in questo caso possiamo vedere ulteriormente che: fra le ∞^{2n} ipersuperficie trasformate V'_n ne esistono ∞^{2n-1} appartenenti alla medesima classe speciale

$$\varepsilon_1 h_1'^2 + \varepsilon_2 h_2'^2 + \dots + \varepsilon_n h_n'^2 = a.$$

E infatti, da

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} h_{\lambda}'^2 = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} h_{\lambda}^2,$$

ossia

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} (h'_{\lambda} - h_{\lambda}) (h'_{\lambda} + h_{\lambda}) = 0,$$

segue, per la (16),

$$(17) \quad \varphi \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} h_{\lambda} (H_{\lambda} + H'_{\lambda}) - w \left(\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} H_{\lambda} H'_{\lambda} + c \right) = 0$$

che è una nuova equazione in termini finiti da aggregarsi al sistema. Ora, se si indica con Ω il primo membro della (17), si trova identicamente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \frac{\gamma_i}{\varphi} (H_i - H'_i) \cdot \Omega,$$

onde risulta che le conseguenze differenziali della (17) sono già contenute nel sistema considerato. Il sistema è dunque ancora completo, e il numero delle costanti essenziali nelle soluzioni resta diminuito di un'unità,

c. d. d.

10. Applicati al caso $n = 2$, i risultati ottenuti dimostrano che: *ogni superficie della classe $H_1^2 \pm H_2^2 = \text{cost}$ ammette ∞^4 trasformate di Ribaucour della stessa classe*. In particolare, per le superficie isoterme queste sono le *trasformazioni* D_m di Darboux per involuppi conformi di sfere. Ma a queste medesime D_m possiamo ricondurre in sostanza le trasformazioni della superficie con $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost}$, ricorrendo alla costruzione del n. 4, ed alla nota proprietà della D_m di essere permutabile colla trasformazione C di Christoffel ⁽¹⁾. Una coppia (S, \bar{S}) di superficie isoterme trasformate di Christoffel viene cioè cangiata, da una D_m , in un'altra tale coppia (S', \bar{S}') . Si prenda una quaderna variabile $(P, \bar{P}, P', \bar{P}')$ di punti corrispondenti sulle quattro superficie e si dividano, secondo il num. 4, i due segmenti $P\bar{P}$, $P'\bar{P}'$ nello stesso rapporto costante k ; allora: *I due punti di divisione M, M' descrivono due superficie della classe $H_1^2 - H_2^2 = c$ legate da una trasformazione di Ribaucour*.

La costruzione vale ancora nel caso delle superficie della classe $H_1^2 + H_2^2 = \text{cost}$, ove però le coppie di superficie isoterme saranno immaginarie coniugate.

Meccanica. — *Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

La regolarizzazione (con conservazione della forma canonica) del problema piano dei tre corpi dipende sostanzialmente dalla trasformazione quadratica

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Ne ho fatto uno studio sistematico in più Note recenti ⁽²⁾, nella prima delle quali esprimevo la fiducia di poter assoggettare anche il problema spaziale ad una regolarizzazione altrettanto esauriente. A ciò induce da un lato la considerazione che la permanenza dei tre corpi in uno stesso piano non conferisce alcun carattere specifico al comportamento analitico del sistema nell'immediata prossimità di un urto binario; dall'altro il fatto che (pur con

⁽¹⁾ Ved. il § 3 della mia Memoria: *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche*, Annali di matematica, serie III, tomo XI (1905).

⁽²⁾ In questi Rendiconti, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569.

l'intervento di ausiliarie ingombranti) una regolarizzazione è già stata raggiunta dal Sundman ⁽¹⁾ con piena generalità.

In questa fiducia, dopo aver infruttuosamente saggiato parecchie trasformazioni di coordinate, pensai di ricorrere ad uno spediente di calcolo alquanto più penetrante, cioè ad una trasformazione canonica di contatto (anzichè semplicemente puntuale), la quale abbia carattere regolarizzante per il problema elementare dei due corpi.

Scopo principale della presente Nota è la deduzione di questa trasformazione dai moti centrali di tipo parabolico e l'analisi delle sue eleganti proprietà geometrico-cinematiche.

Mostrerò prossimamente come essa conduca alla desiderata regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi. Qui ne ho tratto occasione per far conoscere una seconda trasformazione canonica, che introduce *elementi osculatori parabolici* riattaccandosi ad un'altra mia ricerca ⁽²⁾.

1. — RICHIAMI CONCERNENTI IL METODO DI INTEGRAZIONE DI JACOBI.

Sia dato un generico sistema canonico

$$(1) \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a funzione caratteristica $H(p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$ indipendente da t .

Si formi l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$(2) \quad H = \text{cost} = h \quad ,$$

ritenendo nel primo membro ogni

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad .$$

La definizione classica di integrale completo della (2) fa intervenire specificamente h ed altre $n - 1$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. In forma più simmetrica, seguendo Poincaré ⁽³⁾, si può chiamare integrale completo ogni funzione

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

delle x_i e di n costanti ξ_i , la quale:

⁽¹⁾ Nel suo celebrato *Mémoire sur le problème des trois corps*. Acta Mathematica, tomo 36, 1912, pp. 105-179.

⁽²⁾ *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*. Annali di Matematica, serie III, tomo 20, 1913 (dedicato alla memoria di Lagrange).

⁽³⁾ *Leçons de mécanique céleste*, tomo I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, n. 10.

1°) verifichi la (2), ossia, sostituita in H , la riduca ad una funzione $\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ delle sole ξ_i (e quindi costante);

2°) contenga le n costanti essenzialmente, ossia non annulli (nel campo di valori che si considera) il determinante essiano

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Mercè una tale W , le equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\bar{\omega}_i, \\ \frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

definiscono complessivamente l'integrale generale del sistema (1), porgendo le x_i e le p_i in funzione dei $2n$ argomenti ξ_i e $\bar{\omega}_i$: i primi sono da risguardarsi costanti di integrazione; i secondi funzioni lineari di t , e precisamente

$$\bar{\omega}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} t + \gamma_i,$$

le γ_i designando altre n costanti arbitrarie.

2. — MOTO CENTRALE PARABOLICO. TRASFORMAZIONE DI DARBOUX-SUNDMAN.

Per il moto di un punto P (di massa 1), attratto da un centro fisso secondo la legge di Newton, si ha la funzione caratteristica (energia totale)

$$(4) \quad H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r},$$

dove k è la costante d'attrazione ed $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ rappresenta la distanza dal centro, le variabili coniugate $\left(\begin{smallmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ p_1, p_2, p_3 \end{smallmatrix} \right)$ designando rispettivamente coordinate cartesiane e componenti di velocità del punto mobile. La natura della traiettoria dipende notoriamente dal valore (costante per ogni determinato movimento) dell'energia totale H . Il moto parabolico corrisponde al valore zero. Fissiamo questa determinazione, e consideriamo il sistema differenziale che si ottiene da (1) [per $n = 3$, con la espressione (4) di H] cambiando la variabile indipendente a norma della posizione

$$(5) \quad dt = r du.$$

Avremo

$$\frac{dp_i}{du} = -r \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = r \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Per le soluzioni paraboliche, in corrispondenza a cui $H = 0$, i secondi membri possono essere scritti $-\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(rH)}{\partial p_i}$. Le soluzioni stesse appartengono perciò anche al sistema canonico

$$(6) \quad \frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

che differisce dall'originario per la duplice alterazione della variabile indipendente e della funzione caratteristica. Tale trasformazione — in verità non recondita e già da me usata ⁽¹⁾ per la regolarizzazione del problema ristretto — vorrei chiamarla di Darboux-Sundman, poichè collega la sostituzione a t del parametro u di Sundman con una proprietà delle traiettorie conservative dovuta a Darboux.

Tutte le soluzioni del sistema (6) si possono rappresentare (con le modalità richiamate al n. 1) mediante un integrale completo di

$$rH = \frac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - k = \text{cost.}$$

Di queste soluzioni hanno per noi interesse le ∞^5 , comuni con l'originario sistema canonico, per le quali $H = 0$.

Ciò posto, ove si conglobi k nella costante del secondo membro, ci si trova condotti ad assegnare un integrale completo $W(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ della equazione

$$(7) \quad \frac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \text{cost} = \mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Nelle espressioni finali delle x_i, p_i , le costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 dovranno ritenersi vincolate dalla relazione

$$(8) \quad \mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = k,$$

con che si verifica la condizione $H = 0$ caratteristica delle ∞^5 soluzioni paraboliche.

⁽¹⁾ *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.* Acta Mathematica, tomo 30, 1906, pp. 306-327.

3. — COSTRUZIONE DI UN INTEGRALE COMPLETO OMOGENEO DI GRADO $\frac{1}{2}$.

In coordinate polari r, w (colatitudine), φ (longitudine), la (7) si scrive

$$(7') \quad \frac{r}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial w} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 w} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 = \text{cost.}$$

Essa ammette, come si riconosce immediatamente, integrali particolari indipendenti da φ , della forma

$$W = \sqrt{r} f(w).$$

Infatti, sostituendo in (7'), risulta

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} f'^2 + \left(\frac{df}{dw} \right)^2 \right\} = \text{cost.},$$

cui si soddisfa prendendo per es. \bullet

$$f' = 2 \sqrt{\xi} \sin \frac{1}{2} w,$$

con ξ costante positiva arbitraria. Il primo membro della (7') si riduce in conformità a $\frac{1}{2} \xi$.

Si è così trovato un integrale

$$(9) \quad W = 2 \sqrt{\xi r} \sin \frac{1}{2} w.$$

che dipende materialmente da una sola costante, ma che si può agevolmente interpretare come dotato di maggiore generalità. Basta riflettere che (nessuna supposizione essendo stata fatta circa l'orientazione degli assi) è lecito considerare come arbitraria la direzione dell'asse polare Ox_3 , cioè della semiretta a partire dalla quale è contata la colatitudine w . In questa accezione, ove si ritorni a coordinate cartesiane generiche, e si designino con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i coseni direttori della semiretta suaccennata, sarà

$$\cos w = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{r},$$

e W conterrà, oltre a ξ , anche i coseni λ , ossia complessivamente tre costanti indipendenti. Per rendercene conto in modo preciso, immaginiamo il vettore di lunghezza ξ e di coseni direttori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ed esprimiamo W per mezzo delle componenti

$$\xi_i = \xi \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

di questo vettore, continuando tuttavia per brevità a scrivere ξ in luogo di $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$.

La (9) dà

$$(9') \quad W = \sqrt{2\xi r} \sqrt{1 - \cos w} = \sqrt{2} \sqrt{\xi r - \sum_1^3 \xi_i x_i},$$

che costituisce pertanto un integrale della (7) contenente le tre costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 in modo essenziale.

Non mi soffermo a giustificare quest'ultima affermazione, poichè essa apparirà manifesta dallo svolgimento e dal risultato finale del calcolo. Mi limito a rilevare che, a norma della (9'), W si mantiene regolare e diversa da zero, a meno che non si annullino insieme tutte le x_i ($r = 0$), ovvero tutte le ξ_i ($\xi = 0$), o infine tutte le differenze $x_i - \xi_i$ ($\cos w = 1$).

Ricordo, poi, che la sostituzione di (9) in (7') dava per risultato $\frac{1}{2}\xi$, e ne desumo che, per l'integrale completo (9') testè conseguito,

$$(10) \quad \mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}\xi,$$

donde, badando alla (8).

$$(8') \quad \xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = 2k.$$

Tale è dunque la relazione, da cui dovranno ritenersi legate al coefficiente d'attrazione le tre costanti d'integrazione ξ_1, ξ_2, ξ_3 nelle soluzioni paraboliche che ci interessano.

4. — SIGNIFICATO DELLE COSTANTI ξ_i E DEI PARAMETRI $\tilde{\omega}_i$.

Le equazioni che definiscono il movimento sono, in base alle (3) e alla (9'),

$$(11) \quad -\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W} \left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right) = \tilde{\omega}_i,$$

$$(12) \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W} \left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right) = p_i,$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Prima di risolvere rispetto alle x_i e alle p_i , non sarà male rilevare il significato geometrico-cinematico delle $\xi_i, \tilde{\omega}_i$, appoggiandosi sul fatto noto [e altresì — ben si intende — implicito nelle stesse (11) e (12)] che il movimento è centrale ed ha luogo sopra una traiettoria parabolica col fuoco nell'origine delle coordinate.

La circostanza che il moto è centrale implica l'esistenza degli integrali delle aree, che si compendiano nella relazione vettoriale

$$(13) \quad \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{c},$$

designando \mathbf{r} il raggio vettore focale (di componenti ξ_1, ξ_2, ξ_3); \mathbf{v} la velocità, ossia il vettore di componenti p_1, p_2, p_3 ; \mathbf{c} un vettore costante (momento focale della velocità). Per brevità, introduciamo ancora il vettore costante ξ definito dalle componenti ξ_1, ξ_2, ξ_3 , nonchè il vettore (variabile) ϖ definito dalle componenti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Già risulta dalla (8') che il vettore ξ ha lunghezza (certo non nulla) $2k$; resta da renderci conto della direzione, servendoci all'uopo delle (11) e (12). In forma vettoriale esse si scrivono

$$(11') \quad \varpi = \frac{1}{W} \left(\mathbf{r} - \frac{r}{\xi} \xi \right),$$

$$(12') \quad \mathbf{v} = \frac{1}{W} \left(\frac{\xi}{r} \mathbf{r} - \xi \right),$$

e consentono di riconoscere che, *al pari di ξ , è costante anche il vettore $\xi \wedge \varpi$* . All'uopo, moltiplichiamo vettorialmente la (11') per ξ e la (12') per \mathbf{r} . Viene

$$\xi \wedge \varpi = -\frac{1}{W} \mathbf{r} \wedge \xi,$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{W} \mathbf{r} \wedge \xi,$$

donde, per la (13),

$$(14) \quad \xi \wedge \varpi = \mathbf{c},$$

c. d. d.

Ricaviamo dalle (11') anche l'espressione del prodotto scalare $\varpi \times \xi$ e di ϖ^2 , che scriveremo ω^2 , attribuendo, per analogia con ξ , la designazione ω alla lunghezza $1/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ del vettore ϖ .

Si ha

$$\varpi \times \xi = \frac{1}{W} (\xi \times \mathbf{r} - \xi r),$$

$$\omega^2 = \frac{2r}{\xi W^2} (\xi r - \xi \times \mathbf{r}),$$

le quali, badando che, per la (9'), è

$$(9'') \quad \frac{1}{2} W^2 = \xi r - \xi \times \mathbf{r},$$

porgono

$$(15) \quad -\varpi \times \xi = \frac{1}{2} W,$$

$$(16) \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{r}{\xi}.$$

Nota per incidenza che la (15) si esplicita in

$$-\sum_i^3 \tilde{\omega}_i \xi_i = \sum_i^3 \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \xi_i = \frac{1}{2} W$$

e si sarebbe potuta desumere dalla semplice osservazione che W è omogenea di grado $\frac{1}{2}$ rispetto alle ξ (come anche rispetto alle x).

Con ovvia combinazione delle (9''), (15) e (16), si ha

$$\tilde{\omega}^2 \xi^2 - (\varpi \times \xi)^2 = \xi r - \frac{1}{2} (\xi r - \xi \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \xi \left(r + \frac{1}{\xi} \xi \times \mathbf{r} \right).$$

Il primo membro si identifica manifestamente col quadrato del vettore $\xi \wedge \varpi$; cioè, in virtù della (14), con la costante \mathbf{c}^2 .

Ricordando che w rappresenta l'angolo formato dai due vettori \mathbf{r} e ξ , si attribuisce al terzo membro la forma $\frac{1}{2} \xi r (1 + \cos w)$, e se ne ricava l'equazione

$$(17) \quad r(1 + \cos w) = \frac{2}{\xi} \mathbf{c}^2.$$

Questa contiene i soli argomenti variabili r e w , e definisce quindi la traiettoria del moto, dal momento che, in virtù della (13), si tratta di una curva tutta situata nel piano

$$\mathbf{c} \times \mathbf{r} = 0.$$

Il confronto con la forma tipica della equazione polare della parabola mostra che w è l'angolo formato dal raggio vettore \mathbf{r} con l'asse rivolto dalla banda della direttrice; inoltre che la costante del secondo membro,

$$\frac{2}{\xi} \mathbf{c}^2 = \frac{2}{\xi} (\xi \wedge \varpi)^2 = \frac{2}{\xi} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{vmatrix}^2$$

rappresenta il parametro.

In definitiva: *Il vettore costante (ξ_1, ξ_2, ξ_3) di lunghezza $2k$ ha la direzione dell'asse della parabola nel verso che va dal fuoco alla direttrice.*

Quanto ai parametri $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$, compendiate nel vettore ϖ , l'interpretazione risulta immediata dalle (11') e (12'), il cui confronto porge

$$(18) \quad \varpi = \frac{1}{\xi} r \mathbf{v} = \frac{1}{2k} r \mathbf{v}.$$

5. — FORMA RISOLUTA DELLA TRASFORMAZIONE CANONICA
FRA LE DUE SESTUPLE $x_i, p_i; \xi_i, \tilde{\omega}_i$.

Dalle (11), (12) segue l'identità

$$\sum_1^3 p_i dx_i - \sum_1^3 \tilde{\omega}_i d\xi_i = dW;$$

perciò le formule stesse definiscono una trasformazione canonica fra le primitive variabili x_i, p_i e gli argomenti $\xi_i, \tilde{\omega}_i$, purchè soltanto si possano effettivamente risolvere rispetto alle une e agli altri.

Le (11), isolando x_i , e scrivendo Y in luogo di $-\frac{1}{2}W$, porgono

$$x_i = \frac{r}{\xi} \xi_i - 2Y\tilde{\omega}_i.$$

Ma già abbiamo ricavato nel numero precedente [sostanzialmente come combinazione delle stesse (11), (12)] le espressioni di r e di W in termini delle ξ_i e $\tilde{\omega}_i$: esse sono offerte dalle (15), (16), la prima delle quali diviene $\varpi \times \xi = Y$.

Abbandonando la notazione vettoriale, ma conservando le abbreviazioni

$$(a) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2},$$

$$Y = \sum_1^3 \tilde{\omega}_i \xi_i$$

(coi valori aritmetici dei radicali), si ha il primo gruppo delle cercate formule risolte

$$(I) \quad x_i = \tilde{\omega}^2 \xi_i - 2Y\tilde{\omega}_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

cui giova associare l'espressione (16) di r , che ne è del resto una necessaria conseguenza e che riscivo per raccogliere le varie formule da tener presenti in vista dell'applicazione, annunciata nell'introduzione (alla regolizzazione del problema dei tre corpi),

$$(b) \quad r = \xi \tilde{\omega}^2.$$

Le formule esprimenti le p_i risultano dal confronto delle (11) con le (12), confronto che già si è tradotto nella (18). Da questa, sostituendo per r il suo valore (b), si trae

$$(II) \quad p_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Senza eseguire la detta sostituzione, si avrebbe

$$(c) \quad rp_i = \xi \tilde{\omega}_i$$

da cui [o dalle (II)], tenuto conto di (b), scende

$$(d) \quad r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi,$$

che giova fissare per la ragione testè indicata a proposito della (b).

6. — INVERSIONE. COMPORTAMENTO ANALITICO.

La trasformazione (I), (II) si inverte senza alcun calcolo. Basta notare che l'espressione (9') di W dipende in modo simmetrico dalle x_i e dalle ξ_i , talchè anche le formule (11), (12) risultano simmetriche rispetto alle due sestuple (x_i, p_i) , $(\xi_i, -\tilde{\omega}_i)$.

Perciò, ove si scambino materialmente, nelle (I), (II) le x_i, p_i con le corrispondenti $\xi_i, -\tilde{\omega}_i$, se ne traggono le espressioni delle nuove in termini delle antiche variabili. Giova aggiungere che, data la forma delle stesse (I), (II), si perviene al medesimo risultato scambiando addirittura gli elementi corrispondenti delle due sestuple (x_i, p_i) , $(\xi_i, \tilde{\omega}_i)$.

Questa osservazione, congiunta con la circostanza che i secondi membri delle (I) sono polinomi (di terzo grado), e quelli delle (II) funzioni razionali col denominatore $\tilde{\omega}^2$, consente di affermare che la nostra trasformazione è birazionale e regolare per tutti i valori finiti degli argomenti, che non annullano il trinomio $\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2$ o, rispettivamente, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Rispetto alla trasformazione diretta (I), (II), meritano particolare menzione le sestuple Γ costituite da valori tutti nulli delle $\tilde{\omega}_i$, ma non tutti nulli delle ξ_i , talchè $\xi > 0$. Si tratta manifestamente di sestuple (non regolari, per quanto si è testè osservato) le quali si trovano immerse nel campo di olomorfismo senza interromperne la continuità: esse formano infatti una varietà a sole tre dimensioni, mentre lo spazio ambiente ne ha sei.

Supponiamo di far variare la sestupla $\xi_i, \tilde{\omega}_i$ in detto spazio, avvicinandoci ad una Γ lungo una linea (regolare) L , per modo che, tendendo le $\tilde{\omega}_i$ a zero, i rapporti $\frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}}$ ammettano limiti ben determinati γ_i , soddisfacenti necessariamente alla condizione

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Le (I), (b), (c) mostrano che le coordinate x_i , il raggio vettore r e i prodotti rp_i rimangono, anche nell'intorno di una generica Γ , fun-

zioni regolari delle $\xi_i, \bar{\omega}_i$, che si annullano in Γ ; non così le p_i , le quali in generale tendono a diventare infinite.

Quando, lungo L , ci si avvicina indefinitamente a Γ , si ha dalle (I) e (b) [tenuto conto, si intende, delle posizioni (a)]

$$(19) \quad \lim \frac{x_i}{r} = \frac{\xi_i}{\xi} - 2\gamma_i \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\xi} \xi_j \gamma_j;$$

e dalle (II) e (b),

$$(20) \quad \lim \sqrt{r} p_i = \sqrt{\xi} \gamma_i.$$

Se, in particolare, ogni γ_i coincide con $\pm \frac{\xi_i}{\xi}$, come avviene [in base alla (14), per $c = 0$] quando il moto parabolico degenera in rettilineo, risulta

$$(19') \quad \lim \frac{x_i}{r} = - \frac{\xi_i}{\xi}.$$

OSSERVAZIONE. — Nei riguardi delle coordinate x_i la nostra trasformazione canonica (I), (II) non è puntuale, poichè nei secondi membri delle (I) appaiono variabili trasformate di entrambe le serie (ξ_i e $\bar{\omega}_i$). Si tratta quindi di una trasformazione di contatto. Intrinsecamente, per altro, essa rientra nel tipo delle trasformazioni puntuali estese (nel senso di Lie). Infatti le (II) rappresentano una inversione per raggi vettori reciproci fra le p_i e le $\bar{\omega}_i$, e le (I) ne rimangono subordinate dalla condizione di canonicità.

7. — MOTO PARABOLICO TANGENTE AD UN MOVIMENTO GENERICO.

INTERPRETAZIONE DELLE VARIABILI TRASFORMATE $\xi_i, \bar{\omega}_i$.

Dal n. 4 risulta agevolmente quale significato si possa attribuire alle variabili ($\xi_i, \bar{\omega}_i$), quando le (x_i, p_i) si considerano come coordinate e componenti di velocità di un punto mobile con legge qualsiasi.

Basta considerare un ipotetico moto parabolico (*moto tangente*) dello stesso punto, dovuto ad attrazione newtoniana verso l'origine delle coordinate, per cui:

1°) il coefficiente d'attrazione abbia il valore

$$k = \frac{1}{2} r (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

corrispondente alla sestupla (x_i, p_i) che si prende in considerazione;

2°) la parabola traiettoria passi per il punto (x_1, x_2, x_3), toccandovi il vettore (p_1, p_2, p_3).

Le nuove variabili $\xi_i, \bar{\omega}_i$ sono espressivamente collegate a tale moto tangente: ξ_1, ξ_2, ξ_3 definiscono un vettore di lunghezza $2k$ che ha la direzione dell'asse della parabola (vòlto dal fuoco alla direttrice); $\frac{1}{\xi} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_3 \end{vmatrix}^2$ ne è il semiparametro; ecc.

Quando eventualmente, nel corso del moto, le $\xi_i, \bar{\omega}_i$ convergono verso una delle sestuple Γ di cui al n. prec. ($\bar{\omega}_i = 0, \xi > 0$), la parabola osculatrice tende a schiacciarsi indefinitamente, convergendo a zero il relativo parametro; l'orientazione dell'asse ha però un limite ben determinato. Il mobile tende ad avvicinarsi all'origine secondo una direzione pur determinata [cfr. formula (19)]. Se, in particolare,

$$\lim_{\bar{\omega}} \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}} = \pm \frac{\xi_i}{\xi} \quad (i = 1, 2, 3),$$

l'avvicinamento suddetto segue nella direzione dell'asse [formula (19')].

8. — INTEGRALE COMPLETO A VARIABILI SEPARATE. ELEMENTI PARABOLICI.

Accanto alle (I), (II) è degna di interesse un'altra trasformazione canonica la quale collega le x_i, p_i ad elementi osculatori parabolici, assai affini agli ordinari elementi ellittici. Vi si perviene nel modo più rapido, partendo da un integrale completo della (7') del tipo classico

$$(21) \quad W = R + Gw,$$

con G costante ed R funzione della sola r . Si può assumere

$$(22) \quad R = \int_q^r dr \sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}},$$

dove

$$(23) \quad \frac{1}{8} Z^2 = k$$

è la costante del secondo membro di (7'), e

$$(24) \quad q = \frac{4G^2}{Z^2}$$

designa il valore di r (unico nel campo finito) che annulla il radicale. Riferendosi, con ragionamento classico, al modo di variare del raggio vettore lungo l'orbita (parabolica nel caso presente), si constata che q rappresenta la minima distanza del mobile dal fuoco, ossia il semiparametro.

Come retta fissa, a partire dalla quale è contato l'angolo w , intenderemo assunta, seguendo Poincaré ⁽¹⁾, la linea dei nodi (intersezione, debitamente precisata quanto al verso, del piano della parabola col piano Ox_1x_2); con che, detta al solito θ la longitudine del nodo, si ha

$$\cos w = \frac{x}{r} \cos \theta + \frac{y}{r} \sin \theta,$$

$$(25) \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\cos I,$$

I designando l'inclinazione (del piano della parabola sul piano Ox_1x_2).

Dopo ciò, W viene a contenere le tre costanti Z , G , θ caratterizzabili come segue:

Z dipende esclusivamente dal coefficiente di attrazione, a norma della (23);

$G = \frac{1}{2} Z \sqrt{q}$ individua (subordinatamente a Z) il semiparametro q della parabola;

θ rappresenta la longitudine del nodo.

Le (3), adattate alla nostra W in cui Z , G , θ fungono da ξ_i , ove si scriva $-\zeta$, $-g$, Θ al posto di $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$, danno

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial Z} = \zeta, \quad \frac{\partial W}{\partial G} = g, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta; \\ \frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \quad (i=1, 2, 3). \end{array} \right.$$

In base alle (21), (22), (24) e (25), il primo gruppo si scrive

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \sqrt{r-q} = \zeta, \quad \frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial G} + w = g, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -G \cos I = -\Theta,$$

e consente di rilevare il significato degli altri tre parametri ζ, g, Θ .

Per nota proprietà della parabola:

$\zeta^2 = r - q$ rappresenta l'ascissa della generica posizione del mobile, contata lungo l'asse a partire dal vertice;

dalla seconda equazione, applicata al vertice, segue che

g rappresenta l'angolo che la direzione dell'asse (vôlta dal fuoco verso il vertice) forma con la linea dei nodi;

infine la terza equazione mostra che

$\Theta = G \cos I$ individua l'inclinazione.

⁽¹⁾ Loc. cit., nn. 48-51.

Le (26) implicano

$$\sum_i p_i dx_i - (Z d\zeta + G dg + \Theta d\theta) = d(W - Z\zeta - Gg),$$

definendo perciò una trasformazione canonica fra la sestupla p_i, x_i e le due terne coniugate

$$(P) \quad \begin{pmatrix} Z & , & G & , & \Theta \\ \zeta & , & g & , & \theta \end{pmatrix}.$$

Le espressioni esplicite delle x_i, p_i in termini della nuova sestupla (P) si stabiliscono subito, sia per materiale risoluzione delle (26), sia anche più semplicemente (come si suol fare nel caso degli elementi ellittici) ricorrendo a formule elementari di trasformazione di coordinate e sfruttando il significato dei sei parametri.

Tralascio ogni sviluppo, limitandomi ad avvertire che questa trasformazione fra le x_i, p_i e le (P) *non* ha le prerogative regolarizzanti della (I), (II) nell'intorno dell'origine ($x_i = 0$, cui fanno riscontro valori nulli di ζ, G e Θ).

Terminerò osservando che la sestupla canonica (P) si può riguardare come un caso limite (corrispondente al valore zero dell'energia) di quegli elementi ellittici che ho denominato *isoenergetici* ⁽¹⁾ e che, sotto alcuni rapporti, sono preferibili agli ordinari elementi *isodinamici*, in quanto vi comparisce direttamente (per individuare la fase del moto tangente) la anomalia eccentrica, anzichè la media. Analoghi servigi possono rendere gli elementi (P) nello studio delle perturbazioni cometary.

(1) Nella già citata Memoria del tomo XX degli Annali di Matematica. Cfr. altresì H. Andoyer, *Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après MM. T. Levi-Civita et G.-W. Hill*, in Bulletin Astronomique, tome XXX, 1913, pp. 425-429; *Sur les problèmes fondamentaux de la mécanique céleste*, ibidem, tome XXXII, 1915, pp. 5-18.

Matematica. — *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota I del Corrispondente **FRANCESCO SEVERI.**

In questa Nota ed in una successiva mi propongo di rispondere ad alcune questioni fondamentali per la teoria dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica F .

Un teorema classico di Noether, al quale Enriques diede fin dal 1896 la più ampia significazione, afferma che sulla F è unico il sistema completo cui appartiene come curva « totale » una data curva C . Val quanto dire: assegnati su C alcuni punti, che debbano essere base pel costruendo sistema, con molteplicità virtuali non superiori alle effettive, il sistema lineare $|C|$, con quei punti base virtuali, resta perfettamente individuato.

Quanto ai sistemi continui completi, non lineari, sono stati addotti, da Rosenblatt e da Albanese (¹), esempi di curve contenute in distinti sistemi

(¹) *Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica* (Annali di Matematica, 1915). In questa Memoria, che è uno studio critico accurato intorno alle mie ricerche sulla « base », il dott. Albanese osserva giustamente che la relazione di equivalenza algebrica, da me considerata, fra curve di una superficie, si riferisce a curve appartenenti ad un sistema, il quale sia irriducibile come totalità de' suoi sistemi lineari. Con quest'avvertenza (che è bene sia stata posta in luce esplicitamente, dal momento che — secondo aveva già notato il Rosenblatt (Bulletin de l'Acad. des Scienc. de Cracovie, juillet 1912, pag. 780) — esistono sistemi i quali sono irriducibili come totalità di sistemi lineari, ma riducibili come totalità di curve), i miei risultati e le relative dimostrazioni permangono immutati. Io stesso, del resto, avevo segnalato, in un caso eccezionale, la necessità di allargare un po' il concetto di equivalenza algebrica, per mantener uniforme il linguaggio (ved. la mia prima Memoria sulla base, nei Math. Annalen, Bd. 62, 1906, pag. 206). E avevo chiamato « algebricamente equivalenti » due curve che o giacevano in un medesimo sistema irriducibile o fossero resti di un tal sistema rispetto ad una medesima curva. Il dott. Albanese, in sostanza, ha mostrato come questa definizione più ampia basti anche negli altri casi di eccezione, che io non avevo considerati. Avvertirò inoltre che, per stabilire la proposizione « se due curve A, B di F soddisfanno alle relazioni $[AB] = [AA] = [BB]$, esiste su F un integrale semplice di 3^a specie, colle sole curve logaritmiche A, B », non occorre, come crede l'Albanese, invocare il suo teorema XII, ma basta che le $2A, 2B$ stieno ciascuna in un sistema irriducibile ∞^1 con una medesima curva C di F . Si costruisce allora subito l'integrale cercato, sommando due integrali che abbiano rispettivamente le sole curve logaritmiche $2A, C$ e $2B, C$, coi relativi periodi polari $2, -1$ e $-2, +1$ (ved. un'osservazione analoga a pag. 208 della mia ricordata Memoria). Nel suo lavoro l'Albanese giunge pure ad un risultato anche nella sostanza nuovo, che mi piace di segnalare: che cioè il teorema concernente l'esistenza della base, vale anche quando si definiscano algebricamente equivalenti due curve che giacciono in uno stesso sistema irriducibile di curve. E rispetto a questa equivalenza più ristretta non si altera neppure il numero-base q .

continui completi (ciascuno irriducibile come totalità di curve), e la cosa è stata interpretata nel senso che non fosse possibile estendere il teorema di Noether ai sistemi irriducibili completi non lineari ⁽¹⁾.

Ma una tale conclusione dipende dall'aver dato a quel teorema una significazione troppo ristretta, insufficiente per la stessa validità di molte proposizioni classiche. Alla medesima stregua il teorema si troverebbe in difetto pur per i sistemi lineari e nei casi più semplici.

Convieni tuttavia riconoscere che tra i sistemi lineari ed i sistemi continui vi è una differenza, che può trarre facilmente in inganno, di fronte alla possibilità di estendere il teorema di Noether. Questa diversità è legata alla circostanza che, contrariamente a quel che accade per i sistemi lineari, la curva generica d'un sistema continuo può avere punti multipli variabili.

Ma in fondo la divergenza cui s'allude è soltanto apparente, perchè in ogni caso, sia che si tratti di sistemi lineari, sia che si tratti di sistemi completi non lineari, allora soltanto si può parlare di curva « totale » del sistema, quando della curva stessa sia ben definita la connessione riemanniana.

Qualche esempio gioverà subito a chiarire il modo come deve essere posta la questione.

È noto che la totalità delle quartiche piane con 3 punti doppi si spezza in due sistemi irriducibili \propto^{11} , ben distinti: l'uno, Σ_1 , costituito dalle quartiche razionali, e l'altro, Σ_2 , costituito dalle quartiche spezzate ciascuna in una cubica e in una retta. Il sistema Σ_1 è perfettamente definito da una sua quartica *irriducibile* coi 3 nodi variabili, e Σ_2 da una curva *spezzata* in una cubica ed in una retta, coi 3 nodi pure variabili.

Se ora si considera una curva C_0 , la quale sia composta da una cubica piana col punto doppio O e da una retta generica, segante la cubica nei punti A_1, A_2, A_3 , una tal curva C_0 appartiene sia a Σ_1 , sia a Σ_2 ; ma come curva totale di Σ_1 , essa è definita dall'assegnare per nodi variabili O, A_1, A_2 — od O, A_2, A_3 o anche O, A_1, A_3 — e dal considerare come virtualmente inesistente l'altro dei 4 nodi; mentre come curva totale di Σ_2 essa è definita dall'assegnare per nodi variabili A_1, A_2, A_3 e dal considerare come virtualmente inesistente O . E non è questa una convenzione arbitraria per aggiustar le cose a volontà; ma è invece un modo di dire assai opportuno per significare il *fatto sostanziale* che una curva di Σ_1 , la quale si approssimi indefinitamente a C_0 , ha uno dei suoi punti doppi che tende in ogni caso ad O , e gli altri due che tendono a due dei tre punti A_1, A_2, A_3 ; mentre una curva di Σ_2 , che si approssimi a C_0 , ha i suoi tre nodi che tendono sempre rispettivamente ad A_1, A_2, A_3 .

Nel primo caso, due punti di diramazione della superficie di Riemann, immagine della curva variabile, tendono ad uno, p. es. A_1 , dei punti A_1, A_2, A_3 ,

(¹) Ved. la prefazione del citato lavoro di Albanese.

cosicchè due fogli della riemanniana immagine di C_0 , in quanto la si consideri come limite della precedente, devono suppersi combacianti nel punto A_1 , per guisa che attraverso A_1 sia possibile passare dall'uno all'altro foglio: e ciò corrisponde a considerare A_1 come virtualmente inesistente. Nel secondo caso invece la cosa analoga deve ripetersi rispetto al punto O .

Per eliminare ogni incertezza intorno a questo esempio, aggiungerò che la ciscostanza che non sia ben determinata, nella terna A_1, A_2, A_3 , la coppia limite di due dei tre nodi della curva variabile in Σ_1 , dipende da ciò: che effettivamente, a seconda del modo come si passa al limite, si può ottenere una qualunque delle tre coppie $A_1, A_2; A_2, A_3; A_3, A_1$, giacchè nello spazio S_{14} i cui « punti » sono le quartiche piane, il sistema Σ_1 è una varietà che ha nel « punto » C_0 un punto triplo ordinario, origine di 3 falde distinte.

Adduciamo ancora un esempio. Sia F la « superficie » delle coppie di punti di due curve A, A' , di generi π, π' ; e C, C' sieno le curve immagini rispettive delle coppie che hanno un punto fisso su A o su A' . Sulla F la curva Γ_0 , composta da π curve C e da π' curve C' , corrispondenti rispettivamente a due gruppi speciali di punti di A, A' , appartiene a due distinti sistemi Σ_1, Σ_2 , irriducibili come totalità di curve e di dimensioni $\pi + \pi'$, $\pi + \pi' - 1$. La curva generica di Σ_1 è formata da π curve C e da π' curve C' provenienti da due gruppi non speciali di A, A' ; è spezzata ed ha $\pi\pi'$ punti doppi variabili. Invece la curva generica di Σ_2 è irriducibile e sta in un medesimo sistema lineare completo ∞^3 , con ∞^2 curve del tipo Γ_0 .

Orbene, quando Γ_0 si considera come curva totale di Σ_1 , cioè come curva spezzata in $\pi + \pi'$ parti, bisogna assegnare come punti doppi variabili i suoi $\pi\pi'$ nodi; mentre, allorchè essa si considera come curva totale di Σ_2 , i suoi $\pi\pi'$ nodi vanno considerati come virtualmente inesistenti.

Una volta ben precisata la posizione del problema, io mi son proposto d'indagare se il teorema di Noether, inteso nel suo legittimo significato, valesse anche pei sistemi continui non lineari. La ricerca mi si è presentata singolarmente delicata; tuttavia, dopo assidua elaborazione, ho potuto giungere al risultato finale, mediante un procedimento che mi sembra semplice ed elegante. La conclusione è che:

Sopra una superficie F , ogni curva, irriducibile o no, sulla quale sia definito il gruppo base ed il gruppo dei punti multipli variabili, INDIVIDUA un sistema algebrico completo irriducibile di curve, a cui essa appartiene come curva totale.

Od anche:

Se una curva di dato ordine appartiene a due diversi sistemi completi irriducibili di curve dello stesso ordine, le molteplicità ch'essa presenta come limite della curva generica dell'uno, non possono essere le medesime (in valore e in posizione) di quelle ch'essa presenta come limite della curva generica dell'altro.

Per esempio, due sistemi irriducibili di curve irriducibili dello stesso ordine, non possono avere alcuna curva comune, che non abbia qualche nuovo punto multiplo (o, in particolare, sia spezzata).

Fra le molteplici applicazioni del teorema fondamentale di questo lavoro, mi limito ad indicarne alcune fra le più significative. Nel n. 4 intanto estendo il teorema fondamentale alle varietà superiori; nel n. 6 applico quest'estensione a dimostrare che *ogni curva algebrica sghemba (irriducibile e priva di punti multipli) individua una famiglia (completa) di curve sghembe*; e nel n. 5 applico il teorema fondamentale a stabilir la *condizione affinchè una curva spezzata possa considerarsi come limite di una curva irriducibile dello stesso ordine*. Da questa condizione deduco alla sua volta un teorema, che getta nuova luce sulle questioni di realtà concernenti i rami delle curve algebriche.

Oltre ai sistemi irriducibili di curve, si possono considerare su F sistemi irriducibili aventi per elementi sistemi lineari; ed anche per essi può porsi senz'altro la nozione di completezza. Si presenta allora il fatto, a prima giunta paradossale, che un sistema irriducibile completo di curve può non esser completo come totalità dei suoi sistemi lineari.

Così p. es., nel caso prima considerato della superficie F delle coppie di punti di due curve A, A' , il sistema $\Sigma_1 + \Sigma_2$, insieme di Σ_1 e di Σ_2 , è connesso, riducibile, non ulteriormente ampliabile e completamente definito da una qualunque curva di Σ_1 o di Σ_2 .

Ma nonostante la riducibilità di $\Sigma_1 + \Sigma_2$, i sistemi lineari individuati dalle curve di Σ_1 e di Σ_2 costituiscono un'unica totalità irriducibile, che è birazionalmente identica all'insieme delle coppie di punti delle varietà di Jacobi, inerenti ad A, A' .

La spiegazione del paradosso è semplice, giacchè, essendo le curve di Σ_1 , per definizione, spezzate in $\pi + \pi'$ parti, nel sistema lineare, individuato da una qualunque di esse, in quanto curva totale di Σ_1 , i $\pi\pi'$ nodi si debbono assegnare come punti, necessariamente fissi, di molteplicità 2; mentre, quando si presentano nodi nelle curve di Σ_2 , essi debbono considerarsi come inesistenti. Riguardando virtualmente inesistenti anche i nodi di una generica curva Γ di Σ_1 , essa non definisce più il sistema Σ_1 , ma bensì un sistema continuo completo ∞^0 . Cosicchè la totalità irriducibile dei sistemi lineari $|\Gamma|$, ove Γ sia una curva qualunque di Σ_1 o di Σ_2 , la quale voglia in ogni caso considerarsi virtualmente priva di punti multipli, è costituita da $\infty^{\pi+\pi'}$ sistemi continui completi distinti di curve.

Tuttavia, anche per i sistemi completi irriducibili di sistemi lineari, ciascuno dei quali si consideri virtualmente privo di punti base, vale, sotto certe ipotesi, un teorema analogo a quello di Noether, nel senso che è possibile individuare un tal sistema a partire da uno qualunque de' suoi sistemi lineari. Io ho già provato questo fatto fin dal 1906, sotto l'ipotesi che la

curva C del sistema lineare $|C|$ da cui si parte, sia « aritmeticamente effettiva » ⁽¹⁾: anzi in tal caso resta precisato che $|C|$ appartiene ad una serie irriducibile completa di ∞^q sistemi lineari, ove q è l'irregolarità di F .

Nel n. 8 della presente Nota dimostrerò come l'unicità del sistema completo irriducibile, determinato da un dato $|C|$, possa senz'altro affermarsi ogni qual volta $|C|$ appartenga ad una serie irriducibile di ∞^q sistemi lineari.

Lo studio delle varietà irriducibili di sistemi lineari tracciati su F , mi conduce alla conclusione che, quando una tal varietà è completa e di dimensione q' ($0 < q' \leq q$), essa è sempre birazionalmente equivalente ad una varietà di Picard.

Ciò permette (n. 7) di *collegare l'esistenza di una serie completa irriducibile di $\infty^{q'}$ sistemi lineari tracciati su F ($0 < q' < q$) all'esistenza, su F , di un sistema di q' integrali riducibili di 1^a specie con $2q'$ periodi ridotti.*

1. SISTEMI CONTINUI COMPLETI DI CURVE IRRIDUCIBILI PRIVE DI PUNTI BASE E DI PUNTI MULTIPLI VARIABILI. — Per lo studio dei sistemi continui di curve sopra una superficie, è fondamentale la considerazione della serie lineare caratteristica — da me introdotta nel 1904 ⁽²⁾ — la quale viene segata sopra una curva del sistema dalle curve del medesimo che le sono infinitamente vicine.

Com'è ben noto, l'Enriques, in un geniale lavoro del dicembre 1904 ⁽³⁾, dimostrò che è completa la serie caratteristica di ogni sistema continuo completo. Sarà anzitutto opportuno di richiamare brevemente la dimostrazione dell'Enriques, sulla quale son fondate le ulteriori nostre considerazioni ⁽⁴⁾.

Si proietti genericamente, sopra un piano α , la superficie F d'ordine n , che per semplicità supponiamo priva di punti multipli in un conveniente S_r . Ogni curva C , irriducibile e priva di punti multipli, tracciata su F e che non abbia particolari legami col centro di proiezione, proiettasi univocamente in una curva piana C_1 , dello stesso ordine m e dello stesso genere π di C , la quale tocca in un certo gruppo L , di λ punti, la curva di diramazione K del piano n -plo. La C_1 ha inoltre δ nodi, i quali provengono tutti da punti doppi apparenti di C .

⁽¹⁾ Ved. la mia Nota, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto Veneto, tomo 65, pag. 638).

⁽²⁾ *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, tomo 39, 1904, n. 4).

⁽³⁾ *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna, dicembre 1904). Per un'altra dimostrazione, ved. la mia Nota, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Rendic. del Circolo mat. di Palermo, 1905).

⁽⁴⁾ Si vedrà al n. 4 come si possa anche prendere le mosse dai concetti espressi nella mia Nota ultimamente citata.

Ogni curva piana C_1^0 , d'ordine m , con δ nodi e λ contatti con K , la quale appartenga, insieme con C_1 , ad un medesimo sistema continuo S_1 di curve analoghe, è immagine d'una curva C^0 di F , appartenente, insieme con C , ad un medesimo sistema continuo S di curve d'ordine m , tracciate su F . Ciò deriva dall'osservare che la curva D^0 , d'ordine mn , corrispondente su F a C_1^0 , deve essere spezzata in una curva d'ordine m , C^0 , ed in una di ordine $m(n-1)$, perchè altrimenti, facendo tendere C_1^0 e C_1 entro S_1 , nel passaggio al limite, la curva D^0 si spezzerebbe senza acquistare nuovi punti doppi.

Mentre C_1^0 descrive S_1 , la curva C^0 descrive pertanto su F un sistema continuo S , cui appartiene C .

Premesso questo, si consideri su F un sistema irriducibile completo Σ , di curve d'ordine m , contenente C . A Σ corrisponderà in α un sistema irriducibile Σ_1 , di curve d'ordine m , con δ punti doppi e λ -tangenti a K ; e, per quanto precede, anche Σ_1 sarà completo. Alla serie caratteristica, staccata sulla generica C di Σ , corrisponde la serie caratteristica staccata sopra la generica C_1 di Σ_1 , fuori dei δ nodi e dei λ punti di contatto con K , dalle curve di Σ_1 infinitamente vicine a C_1 . Ora questa serie coincide con quella segnata su C_1 , fuori delle suddette intersezioni, dalle aggiunte d'ordine m , che passano pei λ punti di contatto con K ; e ciò perchè le curve di questo sistema *lineare* H , che sono infinitamente vicine a C_1 , hanno in conseguenza δ nodi e λ contatti con K e quindi appartengono a Σ_1 ⁽¹⁾, che è l'unico sistema continuo di curve analoghe contenente la generica C_1 .

Ricordando infine che le aggiunte di un ordine arbitrario staccano sopra una data curva piana una serie lineare completa, si conclude col teorema di Enriques.

2. UNICITÀ DEL SISTEMA CONTINUO COMPLETO INDIVIDUATO DA UNA CURVA IRRIDUCIBILE, PRIVA DI PUNTI MULTIPLI. — Partiamo di nuovo da una prefissata curva C_1 , dotata di δ nodi e di λ contatti con K , che sia proiezione di una curva C di F irriducibile e priva di punti multipli, alla quale ora *non* prescriviamo di esser generica entro un dato sistema continuo completo che la contenga totalmente.

Il più ampio sistema continuo *connesso* T , irriducibile o no, *individuato* su F da C , e le cui parti son costituite da curve irriducibili, di ordine m e genere π , prive di punti multipli, ha per immagine su α il più ampio sistema connesso T_1 , contenente C_1 , costituito da curve d'ordine m con δ nodi e λ tangenti a K . Siccome la C_1 , da cui siamo partiti, è irriducibile e dotata di δ (e non di $\delta+1$) nodi, sta anche per essa la conclu-

⁽¹⁾ Vi è qui una lievissima semplificazione rispetto al ragionamento originario, semplificazione che meglio si presta agli ulteriori sviluppi.

sione alla quale eravamo già pervenuti per la curva generica del sistema irriducibile Σ_1 : che cioè le curve del sistema lineare H , infinitamente vicine a C_1 , staccano su essa, fuori dei nodi e dei punti del gruppo L , una serie lineare completa.

Per maggior chiarezza raffiguriamoci le cose nello spazio S_N

$$\left(N = \frac{m(m+3)}{2} \right),$$

i cui « punti » sono le curve piane d'ordine m . Le rette tangenti nel punto C_1 alla varietà T_1 , forse riducibile, ma comunque connessa, riempiono allora lo spazio lineare H , perchè ogni curva di T_1 , infinitamente vicina a C_1 , passa di conseguenza pei δ nodi di C_1 e pel gruppo L e sta pertanto in H ; e viceversa ogni curva di H , infinitamente vicina a C_1 , ha in conseguenza δ nodi e λ contatti con K ed appartiene perciò a T_1 .

Dicasi ϱ la dimensione di H , sicchè sarà $\varrho - 1$ la dimensione della serie caratteristica completa esistente su C_1 (e su C). Siccome le tangenti alla varietà T_1 in C_1 , riempiono uno spazio lineare S_ϱ , ne segue che la dimensione di T_1 , nell'intorno del punto C_1 , è uguale a ϱ , e quindi per C_1 passerà almeno una parte irriducibile. Σ_1, ∞^ϱ , della varietà T_1 ; e inoltre la varietà tangente in C_1 ad un'altra qualunque delle parti di T_1 , passanti per C_1 , dovrà essere un cono — in particolare, uno spazio lineare — giacente in H .

Fissiamo adesso comunque, entro la varietà T_1 , due « rami » — distinti o coincidenti — aventi l'origine nel punto C_1 ; e stabilita, pure ad arbitrio, una legge di variabilità di due punti \bar{C}_1, \bar{C}_2 , i quali debbano muoversi ciascuno in uno dei rami fissati, tendendo simultaneamente a C_1 , cerchiamo quali sono le possibili posizioni limiti della retta $\bar{C}_1 \bar{C}_2$, allorchè si mutano i due rami o la suddetta legge di variabilità.

Secondo una denominazione introdotta da B. Levi ⁽¹⁾, queste posizioni limiti sono le *corde improprie* di T_1 pel punto C_1 . Orbene, noi dimostreremo che le sole corde improprie della varietà T_1 per C_1 , sono le tangenti a T_1 in C_1 , cioè le rette che escono da C_1 e giacciono nello spazio H ; donde seguirà senz'altro che T_1 passa per C_1 con una sola falda, avendo anzi in C_1 un punto semplice ⁽²⁾.

⁽¹⁾ *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino (2), tomo 48, 1898).

⁽²⁾ Un punto multiplo d'una curva è infatti *caratterizzato* da ciò che le corde improprie per esso sono ∞^1 , distribuite in un numero finito di fasci di raggi (ved. la citata Memoria del Levi). Per un punto semplice passa invece una sola corda impropria: la tangente. Da ciò si trae, come immediata conseguenza, che, se una varietà passa per un punto con più falde — anche di varie dimensioni — o, se pur passandoci con una sola falda, ha in esso un punto multiplo, le corde improprie della varietà in quel punto son più che le tangenti.

Fissare entro T_1 un ramo R_1 uscente da C_1 , significa considerare un sistema ∞^1 di curve di T_1 , tale che i coefficienti dell'equazione d'una curva variabile in quel sistema sono funzioni olomorfe d'un parametro t , le quali per un valore conveniente di t , per es. $t = 0$, si riducono ai coefficienti dell'equazione di C_1 . Sia

$$(1) \quad f(x, y; t) = 0$$

(x, y coordinate cartesiane) l'equazione della curva variabile nel sistema considerato. Similmente,

$$(2) \quad \varphi(x, y; \tau) = 0$$

sia l'equazione della curva variabile in un altro ramo R_2 di T_1 , uscente da C_1 ; e supponiamo che

$$(3) \quad \psi(x, y) \equiv \varphi(x, y; 0) \equiv f(x, y; 0) = 0$$

sia l'equazione di C_1 .

Fissare una legge di variabilità di due « punti » \bar{C}_1, \bar{C}_2 sui due rami R_1, R_2 , significa scegliere un ramo Γ entro la varietà analitica ∞^2 ⁽¹⁾ formata dalle coppie di punti di R_1, R_2 , e considerare le ∞^1 coppie \bar{C}_1, \bar{C}_2 costituenti gli elementi di Γ . Se poi si vuole che \bar{C}_1, \bar{C}_2 tendano insieme a C_1 , occorre che il ramo Γ contenga una coppia formata da due punti coincidenti con C_1 . Siccome ad ogni elemento di Γ corrisponde *un* punto di R_1 ed *un* punto di R_2 , i parametri t, τ di due punti variabili con quella legge in R_1, R_2 , saranno funzioni olomorfe del parametro ε che individua l'elemento variabile in Γ , e le due funzioni dovranno annullarsi entrambe per quel valore di ε che dà la coppia dei punti coincidenti con C_1 . Se questo valore di ε è $\varepsilon = 0$, scriveremo dunque

$$(4) \quad t = \varepsilon^i \theta(\varepsilon) \quad , \quad \tau = \varepsilon^j \eta(\varepsilon) \quad ,$$

ove le θ, η sono funzioni olomorfe di ε , non annullantisi per $\varepsilon = 0$.

Poichè i sistemi (1), (2) debbono assumersi completamente ad arbitrio — e non soltanto generici — fra quelli che, entro T_1 , contengono C_1 , occorrerà supporre che C_1 sia un elemento s -plo ($s \geq 1$) per (1) ⁽²⁾ e σ -plo

(¹) Questa varietà ∞^2 è una « falda » della varietà algebrica costituita dalle coppie di punti di due curve algebriche tracciate su T_1 e contenenti rispettivamente i rami R_1, R_2 .

(²) Cioè che fra le curve del sistema (1) passanti per un generico punto P del piano α , s vengano a coincidere con C_1 , quando P vada in un punto generico di C_1 , e precisamente in un punto esterno al gruppo caratteristico di C_1 (ved. più sotto). Si badi che s non eguaglia di necessità l'ordine ν del ramo R_1 nello spazio S_n . Profrittando dell'identità $\frac{\partial^h f}{\partial t^h} = \sum \frac{\partial f}{\partial c} \frac{d^h c}{dt^h}$, ove le c sono i coefficienti delle x, y in $f(x, y; t)$, si

($\sigma \geq 1$) per (2), per guisa che lungo C_1 siano soddisfatte le relazioni (eventualmente identiche):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0, \dots, \left(\frac{\partial^{s-1} f}{\partial t^{s-1}}\right)_0 = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_0 = 0, \dots, \left(\frac{\partial^{\sigma-1} \varphi}{\partial \tau^{\sigma-1}}\right)_0 = 0,$$

ma non le

$$\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0.$$

Sviluppando le $f(x, y; t)$, $\varphi(x, y; \tau)$, colla formola di Taylor-Cauchy, negli intornoi rispettivi di $t = 0$, $\tau = 0$, avremo pertanto:

$$(5) \quad f(x, y; t) = a\psi(x, y) + \frac{t^s}{s!} \left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + \dots$$

$$(6) \quad \varphi(x, y; \tau) = \alpha\psi(x, y) + \frac{\tau^\sigma}{\sigma!} \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 + \dots,$$

ove a, α sono polinomi degli ordini $s-1$, $\sigma-1$ in t, τ , i quali assumono il valore 1, rispettivamente per $t=0$, $\tau=0$.

L'equazione della curva involuppo di (1), della quale fanno parte, oltre ad una eventuale curva cui non c'interessa di por mente, il luogo dei δ punti doppi variabili di una curva \bar{C}_1 ⁽¹⁾ e la curva K , si ottiene eliminando t fra le:

$$f(x, y; t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

cioè fra le:

$$f(x, y; t) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + \frac{t}{s} \left(\frac{\partial^{s+1} f}{\partial t^{s+1}}\right)_0 + \dots = 0.$$

vede subito che ν eguaglia l'ordine della prima derivata $\left(\frac{\partial^h f}{\partial t^h}\right)_0$ non identicamente nulla, sicchè è sempre $\nu \leq s$. L'ordine ν eguaglia inoltre il numero di quelle curve comuni ad (1) e ad un sistema lineare I, ∞^{n-1} , di curve d'ordine m , le quali vanno a coincidere con C_1 , quando I tende ad un generico sistema ∞^{n-1} contenente C_1 ; mentre s è il numero analogo, allorchè I tende al sistema delle ∞^{n-1} curve d'ordine m passanti per un punto generico di C_1 . Nello spazio S_N si ha un involuppo di ∞^3 iperpiani, rappresentanti ciascuno le curve d'ordine m passanti per un punto del piano α . Il carattere s uguaglia o supera ν , secondo che il predetto involuppo non tocca o tocca il ramo R_1 nell'origine C_1 . Tutto ciò, con opportuni adattamenti, vale pure se R_1 non è un ramo di funzione algebrica e se le curve $f(x, y; t) = 0$ non sono algebriche. Queste proprietà, che paiono assai utili per uno studio approfondito degli involuppi, sono irrilevanti pel nostro scopo attuale.

(1) Ved. ad es. le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 25.

Ne deriva che quando \bar{C}_1 va in C_1 — cioè quando t s'annulla — il gruppo caratteristico di \bar{C}_1 — gruppo comune a \bar{C}_1 e alla curva di (1) che le è infinitamente prossima — va a cadere nell'intersezione di C_1 colla curva, da essa distinta, $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 = 0$. In altre parole, quest'ultima curva, che è d'ordine m , come C_1 , appartiene al sistema lineare H . Similmente si vede che ad H appartiene pure la curva d'ordine m $\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0$.

Consideriamo ora il fascio Φ di curve d'ordine m , individuato dalle \bar{C}_1, \bar{C}_2 variabili entro (1), (2) colla legge (4). Si tratterà di provare che il limite Φ_0 di Φ , per $\varepsilon = 0$, appartiene al sistema H , qualunque sia la prescelta legge di variabilità. All'uopo, fissata una costante generica k (in che cosa debba consistere la genericità di k risulterà dal seguito) si consideri la curva D di equazione $f(x, y; t) + k\varphi(x, y; \tau) = 0$, generica entro al fascio Φ ; ed il fascio Ψ di curve d'ordine m , individuato dalla curva fissa C_1 e dalla D , variabile con ε . Al fascio Ψ appartiene in particolare la curva \bar{D} :

$$f(x, y; t) + k\varphi(x, y; \tau) - (a + k\alpha)\psi(x, y) = 0.$$

Indicato con l il minimo fra gli ordini infinitesimali di t^s, τ^σ rispetto ad ε , e posto:

$$\frac{1}{s!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^s}{\varepsilon^l} = b, \quad \frac{1}{\sigma!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau^\sigma}{\varepsilon^\sigma} = \beta,$$

ove b, β sono costanti, di cui una almeno non nulla, mediante gli sviluppi (5), (6) si ricava subito che il limite \bar{D}_0 della \bar{D} , per $\varepsilon = 0$, è la curva:

$$(7) \quad b \left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + k\beta \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0.$$

Ora, da che la costante k è generica e le due curve $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0$ son distinte da C_1 ed appartengano ad H , anche \bar{D}_0 sarà essa pure distinta da C_1 ed apparterrà ad H .

Il fascio limite Ψ_0 di Ψ , essendo *individuato* dalle C_1, \bar{D}_0 , è formato pertanto da curve di H e perciò la curva D , comune ai fasci variabili Ψ, Φ , ha pur essa per limite una curva del sistema H . Ma D è la curva generica di Φ : dunque il fascio Φ_0 , limite di Φ , sta in H .

Resta così dimostrato che, nello spazio S_N , la retta limite di \bar{C}_1, \bar{C}_2 è una tangente a T_1 in C_1 , e quindi che T_1 passa per C_1 con una sola falda, avente in C_1 un punto semplice.

Possiamo in definitiva enunciare:

Sopra una superficie F , una curva C , irriducibile e priva di punti multipli, sta in un sol sistema algebrico, irriducibile e completo, di curve dello stesso ordine.

Naturalmente il sistema continuo individuato da C potrà anche essere ∞^0 ; ciò accadrà allora e solo allora che su C non esista la serie caratteristica, definita nel modo indicato al n. 1 della mia Nota del 1904 sui sistemi continui.

Dal ragionamento precedente risulta pure che:

La serie caratteristica di un sistema irriducibile completo Σ , di curve irriducibili, prive di punti multipli, è completa, non soltanto sulla generica curva del sistema, ma anche su ogni sua particolare curva C , la quale non abbia acquistato punti multipli.

Di più, la C è origine di una sola « falda » del sistema, e si può sempre assumere come modello proiettivo di Σ una tal varietà, che C abbia su essa per immagine un punto semplice.

3. IL TEOREMA FONDAMENTALE PER UNA CURVA QUALUNQUE. —

Il teorema stabilito può agevolmente estendersi al caso in cui la curva C , irriducibile, tracciata su F , abbia punti multipli, che si assegnino tutti, colle loro molteplicità effettive, come punti base per il costruendo sistema continuo.

Basta invero, per ridursi al caso precedente, operare una trasformazione birazionale della F , che sciolga i punti base fissati in curve eccezionali, ed astrarre dalle componenti fisse che nascono in tal modo nel sistema trasformato.

È quasi superfluo di avvertire che se, ad esempio, su C era assegnato un sol punto base doppio P , cui corrisponda, sulla superficie trasformata F' , la curva eccezionale P' , può benissimo accadere che il sistema irriducibile completo Σ' , individuato dalla curva C' , omologa di C , e le cui curve tagliano P' in 2 punti, sia contenuto (parzialmente) in un sistema continuo più ampio Σ'' di curve, di ordine maggiore di C' , rispetto al quale la P' sia fondamentale. Il fatto che — contrariamente a quel che avviene per i sistemi lineari — Σ'' possa dar come residui, rispetto a P' , più sistemi irriducibili distinti, non reca alcuna noia, perchè sta sempre che due di questi sistemi non possono avere in comune alcuna curva totale.

Suppongasi piuttosto che la curva C , ancora irriducibile, abbia punti multipli — per semplicità diciamo d punti doppi — i quali si assegnino tutti come variabili, colle loro molteplicità effettive. Vogliamo allora provare che, se esiste un sistema irriducibile completo, almeno ∞^1 , senza punti base, il quale contenga C , e sia costituito da curve dello stesso ordine, con d punti doppi variabili, questo sistema è unico.

La curva C avrà per immagine, sul solito piano n -plo α , una curva C_1 , d'ordine m , la quale possiede δ punti doppi, dei quali d , ben determinati, che diremo *punti doppi effettivi*, hanno i due rami sopra una stessa falda del piano multiplo, cioè son tali che uno degli n punti corrispondenti su F ad un punto di α , mobile lungo un ramo uscente da uno dei suddetti d nodi, ha un limite indipendente dal ramo sul quale ci si muove. Gli altri $\delta - d$ punti doppi di C_1 , che chiameremo *punti doppi apparenti*, hanno invece i due rami su falde distinte e provengono appunto da punti doppi apparenti di C .

Ebbene, anche in tal caso si considererà su α il sistema completo connesso T_1 , almeno ∞^1 , contenente C_1 e costituito dalle curve d'ordine m , che hanno δ punti doppi e λ contatti con K , e si concluderà, come prima, che questo sistema ha in C , un elemento semplice. Tutte le curve, appartenenti insieme con C_1 ad un medesimo sistema irriducibile Σ_1 , tolto da T_1 , avranno, al pari di C_1 , d punti doppi effettivi. Infatti, se la generica curva \bar{C} del sistema Σ , corrispondente su F al sistema Σ_1 di α , avesse soltanto $d' < d$ punti doppi, il genere effettivo della \bar{C} si abbasserebbe di $d - d'$ unità nel passaggio da \bar{C} a C ⁽¹⁾, mentre invece le proiezioni di \bar{C} e di C hanno lo stesso numero δ di punti doppi e perciò lo stesso genere.

Si conclude pertanto nel modo già enunciato.

Supponiamo adesso che C sia riducibile e dotata di d punti doppi, che potranno essere nodi delle singole componenti o punti comuni alle componenti a due a due; e inoltre supponiamo che esista un sistema irriducibile completo Σ , il quale contenga C e infinite altre curve dello stesso ordine, dotate di d punti doppi variabili.

Le componenti irriducibili C', C'', \dots della curva C , al variare di C in Σ , descrivono dei sistemi continui, anche ∞^0 , ed eventualmente non tutti distinti. Indichiamo con Σ', Σ'', \dots questi sistemi, completati se occorre. Se la C' ha d' punti doppi variabili, il sistema Σ' , per quanto precede, è perfettamente individuato, per il fatto di dover contenere C' con i suoi d' nodi variabili; e così dicasi di Σ'' , ecc. Laonde il sistema Σ , che è completo, si ottiene come l'insieme di *tutti* i gruppi di curve tolte rispettivamente da Σ', Σ'', \dots , ed è quindi pienamente individuato.

Sia finalmente C una curva, irriducibile o no, sulla quale si assegnino:

- a) alcuni punti base con molteplicità virtuali uguali alle effettive;
- b) alcuni altri punti base (ipermultipli) con molteplicità virtuali minori delle effettive (s'intende che in questa categoria sono compresi anche

⁽¹⁾ Si vede subito, e del resto è ben noto, che ogni nuovo punto doppio che una curva \bar{C} , variabile sopra una superficie F , venga ad acquistare (in un punto semplice di F), è un punto doppio proprio (ved., per la distinzione in propri ed impropri dei punti di una curva variabile in una famiglia, la mia Nota lineea sulla classificazione delle curve, che avrò occasione di citare più tardi).

i punti base, che si vogliono considerare come virtualmente inesistenti; in essi la molteplicità virtuale assegnata è 0);

c) alcuni punti multipli di C , distinti da quelli delle categorie a) b), come punti multipli variabili con molteplicità uguali a quelle che effettivamente presenta in essi la C .

Operando allora una trasformazione birazionale della F , che sciolga i punti delle categorie a) b) in curve eccezionali, la curva C' , trasformata di C , viene a contenere come parte fissa ogni curva eccezionale proveniente da un punto P della categoria b), contata tante volte quant'è la differenza fra la molteplicità effettiva e la molteplicità virtuale assegnata in P .

E si ha così da fare con una curva riducibile priva di punti base ipermultipli, ma dotata di componenti fisse e di punti multipli variabili. Essa, per quanto precede, individua un ben determinato sistema continuo irriducibile a cui appartiene come curva totale. Ne segue subito la cosa analoga per C .

E si conclude col teorema generale enunciato nella prefazione, restando inoltre specificato come si debbono assegnare i punti base e i punti multipli variabili sulla curva C , mediante cui si vuol definire il sistema continuo (punti delle categorie a), b), c) sopra considerate).

Risulta pure che *il teorema della fine del n. 2 vale anche per sistemi continui di curve irriducibili con punti multipli variabili: su ognuna, C , di queste curve, che non presenti punti multipli nuovi rispetto alla generica curva del sistema considerato, la serie caratteristica (fatta astrazione dai punti fissi che cadono nei punti multipli) è completa; inoltre C è origine di una sola falda del sistema cui appartiene; ecc. ecc.*

Meccanica. — *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell.*
Nota del Corrispondente O. TEDONE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Studi litologici sull'isola del Giglio. I: Le rocce verdi.* Nota del Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Le rocce verdi che si trovano nel promontorio del Franco, quella parte di natura geologica diversa che sporge ad occidente dalla maggior massa granitica dell'isola del Giglio, sono state oggetto di studi petrografici da parte del Chelussi ⁽¹⁾ e del Franchi ⁽²⁾. Mentre il primo si limitò all'analisi microscopica di due soli campioni datigli in esame da De Stefani, l'altro ci diede uno studio succinto, ma molto interessante, di alcune rocce raccolte dal Lotti, le quali presentano analogie con altre della Gorgona, di Capo Argentario e di Pegli in Liguria e insieme con queste rientrano nella grande famiglia petrografica delle prasiniti ed anfiboliti sodiche, da lui meglio definita e descritta ⁽³⁾. Credo tuttavia che, anche dopo i lavori del Franchi, le ricerche che mi accingo ad esporre, frutto di varie escursioni che potei compiere nella zona di affioramento delle rocce verdi nell'isola del Giglio (ricerche intese anche ad indagare la composizione chimica, finora ignota, di alcune di esse), possano portare un ulteriore contributo non solo alla conoscenza petrografica dell'isola, ma anche alla più importante questione del metamorfismo delle zone gabbriche o diabasiche in prasiniti e in anfiboliti sodiche.

Come è noto, le rocce verdi appaiono nel versante meridionale del Franco dalla vetta del Poggio Zuffolone, che ne è il punto più elevato (m. 207), fino al mare. La loro posizione stratigrafica è, secondo il Lotti ⁽⁴⁾, fra i conglomerati, le arenarie e gli scisti del permiano, che si trovano lungo il mare fra la Punta di Pietralta e la Punta di Mezzo Franco, e il calcare retico che costituisce gran parte del promontorio; e la loro età è triassica. Secondo il De Stefani ⁽⁵⁾ invece sono le più antiche del Franco e di età predevonica.

Fra esse io ho osservato i seguenti tipi: serpentine scistose, gabbri scistosi prasinitizzati, prasiniti, gabbri massicci all'incirca normali, e anfiboliti

(¹) Chelussi I., *Di due rocce a "glaucofane dell'isola del Giglio.* Rend. Acc. Lincei (ser. 5), 14, (1895), 1° sem., pag. 466.

(²) Franchi S., *Prasiniti ed anfiboliti sodiche provenienti dalla metamorfosi di rocce diabasiche presso Pagli, nelle isole Giglio e Gorgona ed al Capo Argentario.* Boll. soc. geol. ital. 15, (1896), 169.

(³) Franchi, *Notizie sopra alcune metamorfosi di eufotidi e diabasi nelle Alpi occidentali*, in "Boll. com. geol.", 26 (1895), 181; idem, *Contribuzione allo studio delle rocce a glaucofane e del metamorfismo onde ebbero origine nella regione ligure-alpina occidentale*, in "Boll. com. geol.", 33 (1902), 255.

(⁴) Lotti B., *Geologia della Toscana* (1910), pp. 19 e 26.

(⁵) De Stefani C., *Notizie geologiche* (in Sommier S., *L'isola del Giglio e la sua flora.* Torino 1900, pag. LII).

sodiche che da questi derivano per varî gradi di metamorfismo. Non è facile lo stabilire nettamente il loro rapporto stratigrafico con gli scisti cui sono talora intimamente associate. Nella parte inferiore del giacimento gabbri scistosi e serpentine, pure scistose, si alternano con banchi di calcescisti; al di sopra si trovano rocce con scistosità meno evidente, e superiormente ancora rocce massicce o quasi. Che le rocce verdi costituiscano una serie ascendente, che va dalle serpentine e dai gabbri scistosi alle prasiniti e infine ai gabbri massicci e alle anfiboliti sodiche con essi associate, sembra quindi probabile, anche per ragioni di analogia con le coeve e consimili rocce dell'Argentario e della Gorgona⁽¹⁾.

GABBRI PRASINITIZZATI.

Fra la cala dell'Allume e la Punta di Pietralta, nelle località denominate Galera e Salto del Cane, compaiono, presso la riva del mare, dei banchi di gabbro a struttura scistosa. Presso la rupe di Pietralta le rocce gabbriche passano a rocce serpentinosi, anch'esse con distinta scistosità in massa. Così le une come le altre hanno stretti rapporti fra di loro e con calcescisti di color bigio lucente costituiti da calcite predominante, da quarzo, da poco feldspato granulare, da sericite e clorite e infine da pochissimo epidoto.

Macroscopicamente i gabbri mostrano, in una pasta uniforme finamente granulare di color verde, delle grosse lamine di diallagio e delle vene di calcite cristallina. Al microscopio la roccia rivela un aggregato di granuli di feldspato e di cristallotti o granuli di epidoto, in mezzo al quale sono immersi grossi elementi di diallagio in via di trasformazione più o meno avanzata, nonchè numerosi minerali che di questa trasformazione sono il risultato. Il feldspato, tutto di origine metamorfica, cioè in aggregato mosaiciforme di granuli senza geminazione polisintetica, è da riferirsi, per il suo indice di rifrazione ≈ 1.53 , ad un termine albitico: fra i granuli di feldspato si notano numerosi cristallotti allungati di un epidoto quasi incolore, poco ferifero, e scarsi granuletti di zoisite. Calcite cristallina, riunita in noduli o attraversante in forma di vene entro l'aggregato feldspatico-epidotico, è elemento relativamente abbondante. La lawsonite, che è minerale caratteristico ed anche assai diffuso in altre rocce dell'isola, non si osserva invece in questi gabbri, il cui feldspato primitivo mostra di aver subito il tipico e noto metamorfismo saussurítico.

Il pirosseno è da riferirsi unicamente al diallagio il quale, quando non sia ancora metamorfosato, si presenta in grossi cristalli laminari, per traspa-

⁽¹⁾ vedere, oltre il Lotti (loc. cit.), anche: Lotti, *Appunti di osservazioni geologiche nel promontorio Argentario, nell'isola del Giglio e nell'isola di Gorgona*. [Boll. com. geol. ital., 14 (1883), pag. 122]; Fucini A., *Studi geologici sul promontorio Argentario* [Ann. Univ. Toscane, 32, Pisa 1912]; Ugolini R., *Appunti sulla costituzione geologica dell'isola di Gorgona* [Mem. Soc. tosc. sc. nat., Pisa, 18 (1902), pag. 36].

renza di color verde chiarissimo, ma quasi sempre parecchio torbidi, con i suoi caratteri strutturali tipici e con colori d'interferenza ben vivi.

Multiformi ed interessanti sono le trasformazioni e le alterazioni di esso. Non mancano le vere e proprie paramorfosi uralitiche in cui l'idiomorfismo del primitivo cristallo di diallagio resta ben mantenuto. In altri casi invece (e sono più frequenti), i cristalli di diallagio mostrano deformazioni meccaniche come ripiegamenti, rotture e sfrangiature specie all'estremità, dando luogo a formazione di fibre o fasci di fibre di anfibolo attinolitico, o tremolitico, il primo con debole pleocroismo sulle tinte verdi chiare, il secondo, che si presenta anche in forma di laminette, perfettamente incolore; l'uno e l'altro con angolo $c c$ intorno ai 15° . Fra gli anfiboli secondari si trovano cristalletti prismatici a contorno ben definito di orneblenda comune con lo schema di assorbimento e pleocroismo normale, a giallognolo, b giallo-verdognolo, c verde e angolo $c c$ di 12° circa, e laminette di orneblenda bruna nelle quali è dato di osservare a giallo chiaro, c bruno intenso, e l'angolo $c c$ da 6° a 7° . Infine, dei rari elementi fibrosi anfibolici con pleocroismo sui toni verde-chiaro e azzurro-chiaro sembrano indicare un passaggio dai termini attinolitici a quelli glaucofanici, tanto diffusi e caratteristici in altre rocce del Franco.

Devonsi infine segnalare, fra i minerali di origine secondaria, delle laminette di talco che formano delle frangie all'estremo dei residui pirossenici e delle zone di serpentino fibroso o antigoritico che orlano e in parte attraversano la massa dei pirosseni stessi.

Un campione di questi gabbri, raccolto sotto la rupe detta Salto del Cane, ha la seguente composizione chimica:

Si O ₂	47,07
Ti O ₂	0,43
Al ₂ O ₃	17,30
Fe ₂ O ₃	5,04
Fe O	2,95
Mn O	0,56
Ca O	12,38
Mg O	7,88
Na ₂ O	2,22
K ₂ O	0,56
CO ₂	2,04
H ₂ O	2,16

100,59

SERPENTINE.

Le serpentine compaiono con limitato affioramento presso la Punta di Pietralta. Si tratta di rocce che presentano sempre una tendenza alla scistosità e possono passare localmente a veri e propri serpentino-scisti. Hanno colore grigio-verde piuttosto cupo, e nella massa uniforme spiccano solo qualche residuo di lamina pirossenica e venuzze di quarzo. Nelle varietà più scistose si notano anche noduli e concentrazioni più grandi di quarzo.

Le serpentine del Giglio sono di natura antigoritica; e questo carattere le assimila a quelle della Gorgona ⁽¹⁾ e dell'Argentario ⁽²⁾, da considerarsi coeve, e le differenzia da quelle eoceniche del continente, che sono di origine lherzolitica. La natura del materiale antigoritico è così minutamente e compattamente squamosa che un ordinamento delle lamelle di esso, secondo una delle caratteristiche e diverse strutture delle rocce serpentinosi, non appare chiaro, e solo saltuariamente si rende palese un accenno alla impalcatura ortogonale che si ritiene propria delle serpentine di origine pirossenica. Una siffatta origine è resa probabile anche dalla presenza, nella massa, di frequenti lamine diallagiche, tutte più o meno profondamente metamorfosate, che mostrano tuttavia quasi sempre un residuo del minerale primitivo. Il quale è di color grigio-verde chiaro, quasi sempre molto torbido con distorsioni e ripiegamenti evidentissimi e con caratteri strutturali e ottici simili a quelli del diallagio dei gabbri prasinitizzati dianzi descritti. Anche la metamorfosi di esso si manifesta con l'identico processo e ne derivano anche qui attinoto verde-chiaro con leggero pleocroismo sulle tinte verdi, altro attinoto consimile con leggero pleocroismo dal verde all'azzurro chiaro, tremolite fibrosa o lamellare, orneblenda bruna, talco, clorite. Attraversano la massa antigoritica venuzze di quarzo granulare, a cui si associa anche qualche cristallino feldspatico non geminato.

Come dall'osservazione sul terreno, così anche dall'esame microscopico appaiono relazioni strette, genetiche e strutturali, fra queste serpentine e i gabbri prasinitizzati che insieme formano la zona inferiore delle rocce verdi. Gli uni e le altre presentano, anche più accentuati che non altre rocce dell'isola i segni di dinamometamorfismo.

PRASINITI.

A questa famiglia ascrivo un complesso di rocce, pur alquanto differenti fra loro per la quantità relativa degli elementi che le costituiscono, le quali si rinvennero, salendo dalla Punta di Pietralta verso la vetta dello Zuffolone,

⁽¹⁾ Manasse E., *Le rocce della Gorgona*. Pisa (Nistri) 1903.

⁽²⁾ Onetti A., *Rocce del Capo Argentario*. Proc. verb. Soc. tosc. scien. nat. [Pisa, 22 (1913), 15].

al disopra delle serpentine e dei gabbri scistosi. Sono tutte rocce di aspetto uniforme afanitico, finamente granulari, sulle varie tinte dal grigio-verde scuro al verde blastro, con tendenza a scistosità in massa.

Al microscopio si mostrano costituite da anfibolo e da feldspato granulare come elementi essenziali, ai quali si associano in quantità variabile resti di un pirosseno originario, clorite, lawsonite, epidoto, zoisite, calcite, ilmenite.

Il feldspato è in quantità variabile per le diverse varietà: in alcune è l'elemento prevalente, in altre divide il predominio con l'anfibolo. Dove prevale mostra evidente la struttura a mosaico che è tipica di queste rocce: in tutti i casi si tratta di un termine albitico (con indice di rifrazione medio $\approx 1,53$) in cristallotti granulari senza geminazione polisintetica.

Il pirosseno originario, in alcune varietà, è ancora relativamente abbondante; in altre si riduce a pochi resti. Dove è ben riconoscibile mostra i caratteri di un diallagio in cristallotti di dimensioni non grandi, con idiomorfismo perfetto. Il colore verdognolo chiaro, la facile divisibilità pinacoidale, un accenno a geminazione polisintetica, i caratteri ottici conducono a questa diagnosi. Nelle varietà dove il pirosseno si riduce a pochi resti, questi non sono ben determinabili e quindi riesce ben difficile lo stabilire (ciò che d'altronde non mancherebbe d'importanza) se la roccia originaria abbia contenuto come elemento tipico un'augite o un diallagio.

L'anfibolo, derivato dal pirosseno, è di tre sorta: glaucofane abbondantissimo in fibre o lamine che si scindono in aggregati fibrosi con carattere positivo dell'allungamento e schema di pleocroismo a quasi incolore, b violetto chiaro, c azzurro, angolo $cc = 6^\circ$, colori d'interferenza bassi; orneblenda bruna in laminette con pleocroismo: a giallo chiaro; b bruno chiaro, c castagno, e angolo $cc = 10^\circ$ circa; anfibolo fibroso attinolitico con pleocroismo debole sulle tinte verdi, molto più raro.

Saltuariamente abbondante, a seconda delle diverse varietà, è una clorite verde-pallido con pleocroismo quasi insensibile e birifrazione bassissima.

Nella massa feldspatica granulare sono disseminati cristalli di epidoto incolore o appena giallognolo senza pleocroismo, pochi granuli di zoisite e abbondanti cristalli, perfettamente idiomorfi in forma di prismetti con sezioni per lo più di rettangoli e più raramente di rombi, di quel minerale che caratterizza parecchie di tali rocce metamorfiche, che Franchi per primo fece conoscere nelle rocce italiane, cioè di lawsonite. Oltre la forma caratteristica, giovano a farlo riconoscere la rifrazione e la birifrazione elevate nonchè il segno negativo dell'allungamento nelle sezioni rettangolari, e i caratteri di estinzione propri delle specie trimetriche. In questa lawsonite del Giglio non mi fu dato di riscontrare con sicurezza quella lamellazione per geminazione polisintetica che si trova in altri giacimenti italiani ⁽¹⁾. La distribuzione del

⁽¹⁾ Franchi S., *Sulla presenza del nuovo minerale lawsonite come elemento costituente in alcune rocce italiane* [Torino, Atti Acc. sc. XXXII (1896)]; vedi anche Manasse (loc. cit.) e Ugolini R., *Rocce di Montecristo* [Siena, Atti Acc. fisiocritici (1909)].

minerale non è uniforme; ma invece nello stesso campione, e anche nella stessa sezione, esso si addensa in certi tratti, mentre manca completamente in altri.

La descrizione che ho data di queste rocce, che ho distinto col nome di prasiniti, può dirsi una descrizione media, poichè molte sono le differenze che corrono da varietà a varietà in quanto riguarda la distribuzione e la quantità relativa dei minerali sopraccennati. Giustifico il nome, tratto dalla nomenclatura razionalissima di Novarese e Franchi ⁽¹⁾, per il fatto che il feldspato è sempre di natura acida, si presenta sempre in aggregato granulare ed è, o elemento prevalente, o che divide la prevalenza con l'anfibolo sodico (glaucofane), per quanto in alcune varietà la struttura a mosaico, che si ritiene specifica di tali rocce, non appaia evidente. Queste varietà fanno passaggio ad anfiboliti sodiche; ma preferisco avvicinarle piuttosto alle prasiniti, perchè le vere anfiboliti sodiche, che si riscontrano anche nell'isola del Giglio, hanno caratteri strutturali, mineralogici e chimici alquanto diversi.

Di un campione di color grigio-verdastro cupo, a tessitura finamente granulare con feldspato e glaucofane quasi in uguali proporzioni e con lawsonite non abbondante, ho fatto l'analisi chimica che mi ha dato i seguenti risultati:

Si O ₂	45,88
Ti O ₂	0,47
Al ₂ O ₃	14,45
Fe ₂ O ₃	6,91
Fe O	5,12
Mn O	0,45
Ca O	9,75
Mg O	9,51
K ₂ O	1,23
Na ₂ O	3,05
H ₂ O	2,75
	<hr/>
	99,57

GABBRI MASSICCI NORMALI.

Nella più elevata parte del Poggio Zuffolone, alle rocce in vario grado scistose sopradescritte, succedono degli affioramenti di rocce massiccie. Si tratta di gabbri i quali si prestano, in modo eccezionalmente favorevole, allo studio dei fenomeni di metamorfismo, inquantochè in breve tratto permet-

(¹) Novarese S., *Nomenclatura e sistematica delle rocce verdi nelle Alpi occidentali*. Boll. com. geol., 26 (1895), 164.

tono di osservare delle rocce gabbriche quasi normali e, da esse, varî gradi di passaggio a delle vere anfiboliti sodiche metamorfiche.

. I gabbri normali hanno tessitura grossolanamente granosa e mostrano numerose lamine diallagiche di color grigio-verde scuro in mezzo ad una massa feldspatica un po' più chiara. Venuzze e noduli di calcite cristallina appaiono anche all'esame macroscopico. Al microscopio si rivelano ancora tutti i caratteri di un gabbro, e componenti essenziali risultano il diallagio e un feldspato calcico-sodico: l'uno e l'altro però con principî di alterazione e di metamorfismo, che si manifestano, nel primo, con una contorsione che dimostrano di aver subito le lamine del minerale e con la formazione di minerali secondarî, e, nel secondo, con parziale scomparsa della geminazione, con accenno a struttura granulare e riempimento della massa con nuovi minerali. La compenetrazione, di calcite cristallina in tutta la massa della roccia, e più nelle zone feldspatiche è resa più evidente all'osservazione microscopica.

Il feldspato, in grandi individui piuttosto torbidi e ricchi di inclusi con geminazione polisintetica distinta, è, per i suoi caratteri ottici, riferibile ad una andesina; altri individui invece sono ridotti ad un mosaico di granuli senza geminazione distinta, appartenenti ad un termine molto più acido, inzeppati da epidoto, da clorite, da poca lawsonite e, sopra tutto, da calcite abbondante.

Il diallagio è in elementi di color verde-giallognolo chiaro per trasparenza: i cristalli, per lo più idiomorfi, sono diversi fra loro per vario grado di limpidezza, sicchè alcuni sono scevri quasi di inclusioni, mentre altri ne presentano molte nelle caratteristiche serie parallele. L'alterazione comincia in qualche cristallo a manifestarsi con un generale intorbidamento e poi con la formazione, in serie parallele secondo le tracce della sfaldatura, di cristallini fibrosi allungati di un anfibolo attinolitico verde a pleocroismo poco intenso e con la penetrazione irregolare di vene di clorite e calcite entro la massa del cristallo stesso. La clorite è elemento abbondante e presenta debole birifrazione e debole pleocroismo del verde al verde giallognolo e si trova, oltrechè dentro i cristalli di pirosseno, a formare anche speciali aggregati di piccole lamine.

Notevole è il fatto che in questa roccia non vi è traccia di anfibolo sodico, il quale si trova invece sempre in altre dove il metamorfismo è più progredito.

L'esame chimico di queste rocce in un campione con segni minimi di metamorfismo si presentava particolarmente importante come punto di partenza per osservazioni sull'andamento chimico.

La composizione chimica di una varietà scelta fra quelle che mostrano tracce minori di metamorfismo è risultata la seguente :

Si O ₂	43,05
Ti O ₂	0,37
Al ₂ O ₃	17,45
Fe ₂ O ₃	5,29
Fe O	2,04
Mn O	2,13
Ca O	11,17
Mg O	8,60
K ₂ O	0,70
Na ₂ O	3,24
CO ₂	3,48
H ₂ O	3,28
	<hr/>
	100,80

ANFIBOLITI SODICHE A CROCIDOLITE.

Dai gabbri sopradescritti si passa, per gradi di sempre più progredito metamorfismo, a delle rocce che ben si possono chiamare anfiboliti sodiche, perchè hanno come elemento essenziale e predominante un anfibolo sodico. Mineralogicamente la caratteristica essenziale di esse è la presenza, accanto ad un anfibolo glaucofanico, di un anfibolo riebekitico (crocidolite) che in talune varietà è addirittura prevalente.

Verso la vetta del Zuffolone si incontrano rocce di color violaceo scuro, quasi nero per l'abbondanza di un anfibolo sodico laminare. L'elemento feldspatico è ancora riconoscibile da chiazze bianche o bruno-verdastre e anche da qualche superficie di sfaldatura.

Il materiale più abbondante è l'anfibolo derivato dalla trasformazione del diallagio ancora riconoscibile in quei cristalli che hanno subito solo in parte la trasformazione. In tal caso si può notare in questo una fine e perfetta struttura polisintetica per geminazione secondo [001], un colore per trasparenza verde-giallastro abbastanza intenso, ma senza pleocroismo sensibile.

L'anfibolo più comune è, o glaucofane, o crocidolite. Il glaucofane è per lo più in cristalletti prismatici allungati, riuniti parallelamente a formare delle vere lamine che sostituiscono quelle primitive di diallagio: ma si osserva anche in cristalletti isolati, perfettamente idiomorfi e in sezioni a losanga. I cristalli hanno allungamento positivo e pleocroismo con il seguente schema: α verde giallognolo quasi incolore; β violaceo; γ azzurro. In essi osservasi $cc = 6^\circ$ circa.

La crocidolite si presenta pure in lamine, ma queste si risolvono in un intreccio subparallelo di fibre, che appaiono come riunite in fasci: è frequentissima anche in fibre e in aciculi isolati senza terminazione netta, e questo minor idiomorfismo serve anzitutto a distinguerla dal glaucofane. Dal quale si differenzia altresì, per colori d'interferenza più bassi (sull'azzurro cupo), per il segno di allungamento delle fibre che è negativo e per pleocroismo un po' differente per intensità di tinte e con lo schema seguente: a azzurro vivo; b violaceo intenso; c verde giallastro. Negli aggregati fibrosi laminari l'estinzione non è esattamente determinabile per la sua ondulosità, ed anche nelle fibre più grosse isolate la determinazione sicura non riesce agevole per la forte dispersione delle bisettrici: la media di molte misure mi ha dato il valore dell'angolo $ca = 12^\circ$ circa.

La presenza della crocidolite in prasiniti e anfiboliti sodiche italiane fu osservata per la prima volta dal Lacroix ⁽¹⁾ per rocce della Gorgona e del monte Argentario e confermata poi, negli studî ulteriori e già citati, dal Franchi, dal Manasse e dal Onetti. Lo stesso minerale fu poi spesso osservato dal Franchi in rocce delle Alpi occidentali, e ulteriormente anche dal Termier ⁽²⁾ in rocce della stessa regione: di guisa che esso si può considerare ormai come un elemento abbastanza diffuso e molto caratteristico di alcune di queste rocce metamorfiche.

L'unione fra glaucofane e crocidolite è così intima, che accade talora di osservare nello stesso cristallo di diallagio la trasformazione in un anfibolo verde a pleocroismo poco intenso (attinoto) e nei due anfiboli azzurri. Uno di questi cristalli, ancora per la maggior parte inalterato, nel suo interno mostra una orlatura periferica, più o meno spessa, di anfibolo azzurro; e questo comincia anche ad apparire in chiazze sparse qua e là nell'interno, disponendosi sempre in fibre o cristalletti allungati secondo l'asse verticale e tutti paralleli fra loro e con l'asse verticale del diallagio. Ad una estremità poi del cristallo, dove la trasformazione in anfibolo azzurro è penetrata più addentro nella massa, le fibre di anfibolo azzurro presentano, alcune, allungamento positivo (glaucofane), altre allungamento negativo (crocidolite): senza l'aiuto di una lamina di gesso o di una di mica $\frac{1}{4} \lambda$ non riuscirebbe evidente l'intima unione dei due diversi anfiboli sodici, perchè i rispettivi assi c ed a del glaucofane e della crocidolite sono a un dipresso paralleli (in verità la loro inclinazione dipende dal diverso valore degli angoli cc e ca nell'uno e nell'altro), e questi presentano quasi lo stesso tono di colore azzurro vivo quando vengono a coincidere colla sezione principale del polarizzatore.

⁽¹⁾ Lacroix A., *Sur les propriétés optiques de la crocidolite et la diffusion de ce minéral*. Bull. soc. franc. de minér. XIII (1890), 10.

⁽²⁾ Termier P., *Roches à lawsonite et à glaucophane et roches à riebeckite de Saint-Veran (Hautes Alpes)*. Ibidem, XXVII (1904), 265.

In un altro caso ho osservato una sezione di diallagio completamente trasformata in un aggregato parallelo di fibre di un anfibolo azzurro glaucofanico e di uno verde-chiaro attinolitico, pur conservando il contorno cristallino primitivo. L'orlo della sezione presenta un mantello, non molto spesso, di crocidolite in fine e corte fibre e plaghe, pure di crocidolite, pervadono la massa stessa attinoto-glaucofanica penetrando per le fenditure irregolari di essa, allo stesso modo che si vede il serpentino penetrare con maglie irregolari nei cristalli di olivina. Il Franchi (loc. cit.) ebbe già ad osservare la presenza di due anfiboli sodici di natura diversa, non solo nella stessa roccia ma in un unico cristallo: e le mie ricerche mi fanno ritenere che un tal fatto in queste rocce metamorfiche sia abbastanza frequente.

Il feldspato è ancora in parte in distinte e larghe sezioni con geminazione polisintetica, come il feldspato cioè dei gabbri normali. In tale caso ho potuto constatare per i caratteri ottici la presenza di termini oligoclasici o, al più, andesinici; miscele più basiche non mi fu dato d'osservare. Altra parte del feldspato della roccia è ridotta invece al solito aggregato granulare mosaiciforme con granuli di dimensioni abbastanza grandi, ma senza geminazione, limpidi e con indice di rifrazione $\approx 1,534$. Si ha dunque della albite e, insieme con essa, molta bella e tipica lawsonite in cristalletti prismatici nettamente idiomorfi, per lo più a contorno rettangolare e, in tal caso, con allungamento negativo, senza distinta geminazione polisintetica, con forte rilievo e vivissimi colori d'interferenza. Il diverso modo di comportarsi del feldspato calcico-sodico verso gli agenti di metamorfismo nella stessa roccia non trova altra spiegazione se non nella diversa composizione chimica di esso: le miscele più acide resistono al processo di prasinitizzazione o saussuritizzazione che dir si voglia, mentre le più basiche lo subiscono completamente.

Infatti tutti i feldspati in grossi elementi e con distinta geminazione, che si rinvenivano ancora inalterati o poco alterati in tutte queste rocce verdi del Giglio, sono miscele andesiniche o anche oligoclasiche.

Altri minerali che si osservano in queste anfiboliti sodiche sono epidoto in granuli a contorno irregolare, quasi incolore o di un color giallo verdognolo chiarissimo, zoisite in rari cristalletti a contorno arrotondato, clorite in quantità assai minore che non nei gabbri poco metamorfosati dianzi descritti e con i medesimi caratteri, pochi cristalli di titanite fresca e una quantità relativamente abbondante di leucoxeno, il quale, oltre a formare larghe chiazze intorno a detti cristalli, pervade anche certe sezioni anfiboliche penetrando con maglie a losanga lungo le tracce dei piani di sfaldatura, maglie che nel loro interno racchiudono per lo più clorite, ma, in parte, anche anfibolo azzurro.

Ecco l'analisi di un campione raccolto presso la vetta dello Zuffolone:

Si O ₂	44,03
Ti O ₂	1,80
Al ₂ O ₃	19,65
Fe ₂ O ₃	8,22
Fe O	6,11
Mn O	1,49
Ca O	6,51
Mg O	5,20
K ₂ O	0,24
Na ₂ O	2,66
H ₂ O	3,44
	<hr/>
	99,35

Il non esser nell'isola del Giglio il metamorfismo delle rocce verdi così generale e avanzato come in altre regioni, costituisce una condizione assai favorevole per chiarire qualche dato di fatto intorno al processo metamorfico stesso.

Riassumendo, si può ritenere con sicurezza che i gabbri massicci della più elevata zona del Franco si sono trasformati in anfiboliti sodiche, perchè si può seguire esattamente il graduale passaggio da un tipo all'altro di rocce. Con non altrettanta sicurezza, ma con sufficiente approssimazione al vero, si può ritenere che invece la metamorfosi dei gabbri scistosi della zona inferiore proceda verso le prasiniti, che con essi sono in relazione di giacitura; soltanto, in questo caso non appaiono così evidenti i gradi di passaggio.

Per ciò che riguarda i caratteri mineralogici di tale metamorfismo, i fatti più importanti di cui bisogna tener conto sono i seguenti:

I gabbri scistosi che hanno il loro feldspato completamente saussuritizzato non mostrano nella massa di esso la lawsonite, la quale è abbondante nelle prasiniti che da essi gabbri derivano per più progredito metamorfismo.

Il feldspato più acido nei gabbri massicci e anche nelle anfiboliti sodiche ha resistito al processo di metamorfismo; mentre il feldspato più basico, già negli stessi gabbri, e più nelle anfiboliti sodiche, si è trasformato in un aggregato di albite, di lawsonite e di altri minerali.

La calcite, che è abbondante nei gabbri scistosi e nei gabbri massicci, cioè nelle rocce senza o con poca lawsonite, manca quasi del tutto nelle prasiniti e nelle anfiboliti sodiche, dove invece la lawsonite si riscontra sempre in quantità notevole.

La trasformazione anfibolica del pirosseno dai gabbri massicci alle anfiboliti sodiche ci presenta schematicamente queste fasi: diallagio, attinoto e

glaucofane, e infine crocidolite (minerale con quantità considerevoli di ossidi di ferro). Le fasi invece della medesima trasformazione dai gabbri scistosi alle prasinita sarebbero: diallagio, attinoto e glaucofane, orneblenda verde e orneblenda bruna, la quale rappresenterebbe in questo caso il termine ultimo, anch'esso notevolmente ferifero.

Il confronto delle analisi da me eseguite ci permette inoltre qualche interessante osservazione sulla costituzione chimica delle rocce del Franco e sopra il processo chimico del metamorfismo. Nella seguente tabella, oltre alle mie, ho riportato anche le analisi del Manasse (loc. cit.) in rocce analoghe della Gorgona.

	I	I*	II	III	III*	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Si O ₂	47,07	49,05	45,88	43,05	46,39	44,03	49,28	47,03	44,46	46,04	41,68
Ti O ₂	0,43	0,45	0,47	0,37	0,40	1,80	0,42	0,38	0,39	0,40	tracce
Al ₂ O ₃	17,30	18,83	14,45	17,45	18,81	19,65	16,34	16,47	17,65	18,28	21,76
Fe ₂ O ₃	5,04	5,25	6,91	5,29	5,70	8,22	4,62	3,81	3,86	4,00	2,01
Fe O	2,95	3,08	5,12	2,04	2,20	6,11	6,48	9,17	8,52	8,82	2,04
Mn O	0,56	0,59	0,45	2,13	2,29	1,49	tracce	tracce	tracce	tracce	—
Ca O	12,38	10,20	9,75	11,17	7,27	6,51	9,29	7,38	8,86	7,18	10,39
Mg O	7,88	8,21	9,51	8,60	9,17	5,20	6,37	6,77	7,44	7,71	12,74
K ₂ O	0,56	0,58	1,23	0,70	0,75	0,24	0,14	0,45	0,39	0,40	0,29
Na ₂ O	2,22	2,31	3,05	3,24	3,49	2,66	3,77	4,24	4,05	4,19	1,46
H ₂ O p. arr.	2,16	2,25	2,75	3,28	3,53	3,44	2,54	3,71	2,98	3,09	6,75
H ₂ O a 110°	—	—	—	—	—	—	0,25	0,34	0,36	0,37	0,46
CO ₂	2,04	—	—	3,48	—	—	—	—	1,52	—	—
Ph ₂ O ₅	—	—	—	—	—	—	0,05	0,09	0,05	0,05	tracce
S	—	—	—	—	—	—	0,06	—	—	—	0,07
TOTALE . . .	100,59	100,60	99,57	100,80	100,00	99,35	99,61	99,84	100,53	100,53	99,65

I Gabbro prasinitizzato del Giglio.
 I* Idem. detratto Ca CO₃ e ridotto a 100.
 II Prasinite a glaucofane del Giglio.
 III Gabbro massiccio quasi normale del Giglio.
 III* Idem. detratto Ca CO₃ e ridotto a 100.
 IV Anfibolite sodica a crocidolite del Giglio.

V Diabase prasinitizzato della Gorgona.
 VI Prasinite anfibolica della Gorgona.
 VII Prasinite cloritica della Gorgona.
 VIII Idem. detratto Ca CO₃.
 IX Eufotide prasinitica a lawsonite della Gorgona.

(Manasse)

È evidente che le rocce verdi del Giglio non differiscono notevolmente fra di loro e neanche da quelle analoghe della Gorgona, e, come queste, rientrano nella composizione chimica media dei gabbri e dei diabasi. Nella classificazione chimica delle rocce a glaucofane stabilita dal Washington ⁽¹⁾, le prasiniti e le amphiboliti sodiche del Giglio appartenerebbero al gruppo basico.

Un più accurato esame dei risultati delle mie analisi dimostra che una qualche differenza nella quantità di taluni elementi passa fra i gabbri meno metamorfosati e le prasiniti ed amphiboliti sodiche che ne derivano: cosicchè l'opinione, espressa dal Franchi e confermata dal Manasse, che un tale metamorfismo chimico avvenga unicamente per scambio di elementi fra gli stessi minerali della roccia senza intervento di elementi dall'esterno, se pur vera nelle linee generali, non deve ritenersi tale in tutti i particolari. Già lo Zambonini ⁽²⁾, nello studio del metamorfismo di un gabbro della Val di Susa, aveva osservato che il fenomeno procede con qualche modificazione chimica quantitativa e con qualche scambio di elementi con l'esterno: nelle rocce metamorfosate, in confronto a quelle da cui derivano, egli trovò maggiori quantità di ossidi di ferro ed una caratteristica diminuzione di CaO con conseguente aumento di MgO. Uno sguardo alla tabella basta a dare la prova che la prima delle osservazioni dello Zambonini trova senz'altro conferma nelle mie analisi: anzi l'aumento di ossidi di ferro nelle rocce del Giglio accade in misura maggiore che non nelle rocce della Val di Susa. Un tal fatto era prevedibile, del resto, dallo studio mineralogico, che ha fatto constatare la presenza di orneblenda bruna e di crocidolite, cioè di minerali molto ferri-feri, fra i prodotti di più avanzato metamorfismo.

Non così agevole è l'interpretazione della decalcificazione che anch'io ho osservato nelle mie rocce. Se si confrontano l'analisi I con l'analisi II, e l'analisi III con la IV, si osserva una notevole diminuzione di CaO dalle rocce meno alle rocce più metamorfosate; ma questa diminuzione è giustificata dal fatto che la roccia I e la III sono assai ricche di calcite, mentre ne scarseggiano o ne mancano la II e la IV; e i dati calcolati nelle colonne I* e III* servono appunto a dimostrare che, se si fa astrazione dalla calce sotto forma di carbonato, la differenza in CaO fra dette rocce più non è considerevole. Bisognerebbe dunque conoscere, per poter ammettere che il metamorfismo proceda senz'altro con diminuzione di CaO, se la calcite che si trova nelle rocce I e III sia un prodotto della decomposizione dei silicati calciferi della roccia o non sia invece dovuta a penetrazione dall'ambiente esterno durante le primissime fasi del fenomeno. Giova a questo proposito il ricordare l'intimissima unione dei gabbri, specialmente scistosi, con i calce-

(¹) Washington H. S., *A chemical study of the glaucophane schists*. Amer. journal of science, XI (1901).

(²) Zambonini F., *Ueber den metamorphosierten Gabbro der « Rocca Bianca » in Susa-Tale*. Neues Jahrbuch für Miner. ecc. (1906), II, 105.

scisti, che abbiamo indicata a suo tempo. Nell'un caso il metamorfismo decorrerebbe effettivamente con diminuzione di CaO ; nell'altro, con aumento iniziale di CaO , che poi nel processo del fenomeno verrebbe di nuovo eliminata. Nell'un caso e nell'altro è opportuno di far rilevare l'azione che questa fase transitoria di abbondanza di CaCO_3 potrebbe esercitare sopra la genesi della lawsonite che comparisce soltanto a metamorfismo molto progredito. Vale a dire, che la derivazione di questo minerale dai feldspati meno acidi potrebbe accadere con un processo un po' più complicato che non sia quello supposto nell'ipotesi, tanto seducente per la sua naturalezza e semplicità, di un semplice sdoppiamento delle molecole del feldspato calcico sodico, ammessa dal Franchi.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi*. Nota VIII: *Azione dei gas della respirazione sul preparato diaframmatico* (parte 2^a), del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

III.

Ancora delle variazioni del tono, spontanee e provocate dai gas della respirazione.

Già nella mia prima Memoria (loc. cit.) io riprodussi nelle figg. 8 e 9 (pag. 53) un lungo tracciato dimostrante la capacità del preparato frenico-diaframmatico di eseguire spontanee oscillazioni del tono, o contratture periodiche, insieme con rapide contrazioni ritmiche, che s'intensificano sull'altipiano di ciascuna contrattura.

Un fenomeno simile fu in seguito da me osservato anche un'altra volta. In questi casi il preparato non era affatto stimolato.

Contratture analoghe, però, ho recentemente osservato in condizioni diverse, e cioè durante la stimolazione ritmica, fatta a intervalli considerevoli, del preparato diaframmatico. Si osservino a questo proposito le figg. 1 e 2.

Subito dopo il primo gruppo di contrazioni (che nelle figure non è riprodotto), i preparati incominciarono a reagire, durante i periodi di stimolazione ritmica alternati con periodi di riposo, con notevoli contratture. Le contratture eseguite dai preparati immersi in solo liquido di Ringer furono, in ambedue i casi, più forti di quelle eseguite dai preparati esposti all'azione del lattato sodico.

La differenza potrebbe esser dovuta, in parte, alla maggiore concentrazioni dei sodioni, in parte a un'azione inibitrice sul tono esercitata dai lat-

tationi. Risulta però dagli esperimenti, in modo evidente, che la contrattura si manifesta solamente durante le stimolazioni, poi che nei periodi di riposo il tono dei muscoli torna press'a poco al valore di prima.



FIG. 1. — Due preparati presi dal diaframma destro di una cagna, immersi in liquido di Ringer, eccetto durante la stimolazione ritmica.

Stimolazione: 2 accumulatori Edison; DR = 180 mm.; frequenza degli stimoli unici d'apertura di corrente indotta = 30 al 1'.

Temper.: 32° C. Peso: gr. 4; tempo: 1'.

Il preparato che registrò il tracciato inferiore si trovava in 80 cm³ di liquido di Ringer; il superiore, in 80 cm³ di liq. di Ringer, al quale furono aggiunti 4 cm³ di soluzione 10 % di lattato sodico.

Ma nei tracciati della fig. 2, e specialmente nell'inferiore, oltre alla contrattura coincidente coll'intero periodo delle stimolazioni ritmiche, si osserva una singolare contrazione tonica del preparato, che apparisce quasi nel mezzo di ciascun periodo di attività ritmica. Essa esiste anche nel trac-

ciato superiore, ma è assai meno cospicua. Questa contrazione tonica sembra essere affatto indipendente dalle stimolazioni ritmiche, perchè apparisce circa 3' dopo l'inizio di queste, e si risolve prima che esse cessino.

Le contrazioni toniche ricordano quelle dell'atrio cardiaco di *Emys europaea*, anche per il fatto, ancora più cospicuo nella fig. 3, che le con-

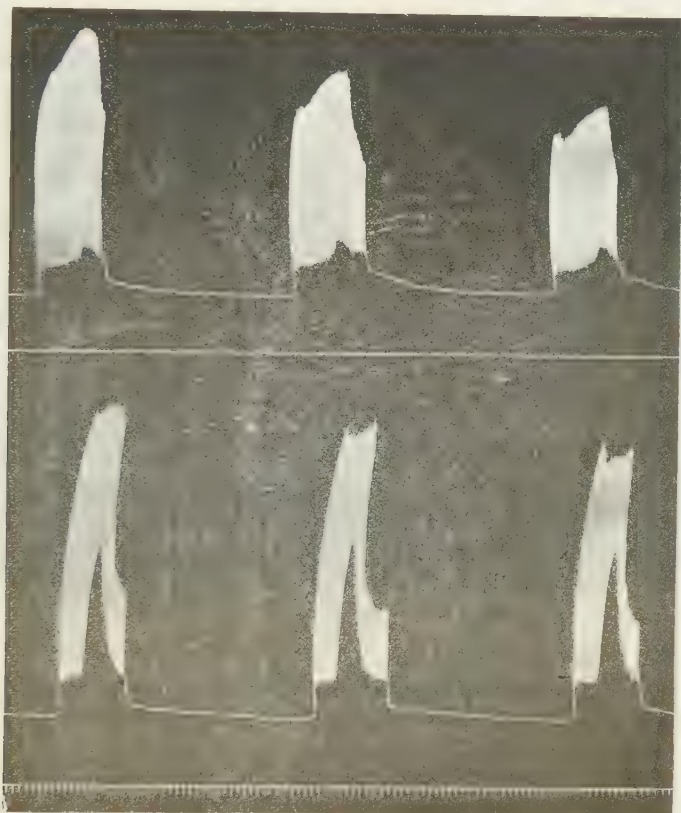


FIG. 2. — Due preparati presi dal diaframma destro di un canino di 6 mesi, immersi in liquido di Ringer, eccetto durante la stimolazione ritmica.

Stimolazione: 2 acc. Edison; DR=160 mm.; frequenza degli stimoli = 30 al 1'.

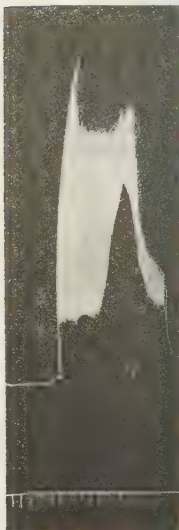
Temper.: 33° C. Peso: gr. 4; tempo: 1'.

Il preparato che registrò il tracciato inferiore si trovava in 70 cm³ di liquido di Ringer; il preparato superiore, in 70 cm³ di liq. di Ringer, al quale furono aggiunti 3 cm³ di soluzione 10 % di lattato sodico.

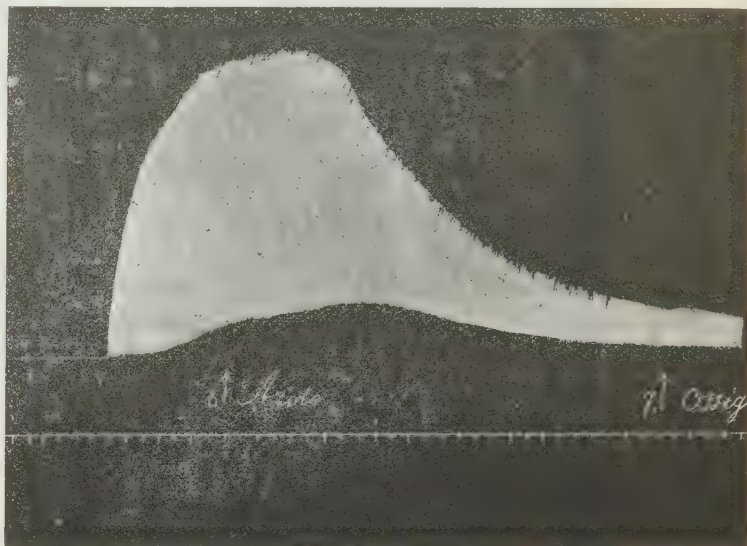
trazioni rapide, elevantisi sulla cima della contrazione tonica, sono più alte delle precedenti. Osservando i tracciati, si riceve l'impressione che, mentre procedono le contrazioni rapide ritmicamente provocate dagli stimoli elettrici, a un certo momento si desta l'attività di un'altra struttura contrattile del muscolo, capace di eseguire una contrazione lenta che dura circa 5-6'. (Sui

particolari delle curve periodiche di fatica, che presenta il muscolo esposto all'azione del lattato sodico, tornerò in una Nota successiva).

Degno di nota è il fatto che, fra le contrazioni toniche ora descritte e le ritmiche contrazioni rapide provocate dagli stimoli elettrici, pare che esista qualche relazione di reciproca dipendenza. Specialmente nei tracciati inferiori delle figg. 2 e 3 si vede chiaramente, che le contrazioni rapide



3



4

FIG. 3 — Continuazione del tracciato della fig. 2.

FIG. 4. — Preparato diaframmatico di cane, non immerso in liquido di Ringer.

Dopo vari esperimenti, il muscolo fu lasciato per alcune ore in riposo, immerso in liquido di Ringer abbondantemente ossigenato.

Dopo questo lungo riposo, esso fu di nuovo stimolato ritmicamente, e registrò la curva di fatica riprodotta in questa figura.

Stimolazioni: 2 acc.; DR = 120 mm.; frequenza degli stimoli = 30 al 1'.

Temper.: 32° C. Peso: gr. 10; tempo: 1'.

In 6, all'ossigeno fu sostituito l'azoto: la contrattura, che s'era già iniziata, s'intensificò.

diminuiscono improvvisamente di altezza in coincidenza coll'inizio del tratto discendente della contrazione tonica, o poco dopo; quasi che una sola fosse la sorgente dell'energia alla quale attingono i due processi contrattorii, ed essa fosse in parte esaurita dalla contrazione tonica.

Nella 1^a parte di questa Nota ho riprodotto tracciati dimostranti come, in certe condizioni, l'acido carbonico sia capace di provocare nel preparato diaframmatico la tendenza all'accorciamento tonico.

In altre condizioni, un'azione analoga esercita l'espulsione dell'ossigeno, fatta mediante una corrente di azoto, dal liquido di Ringer in cui il pre-

parato diaframmatico, stimolato da scosse elettriche, si contrae ritmicamente. Ciò dimostrano i tracciati delle figg. 4 e 5.

Finalmente, una contrattura iniziale più o meno cospicua durante l'attività ritmica del muscolo può verificarsi anche in presenza di ossigeno, sia il preparato immerso in liquido di Ringer, o no.

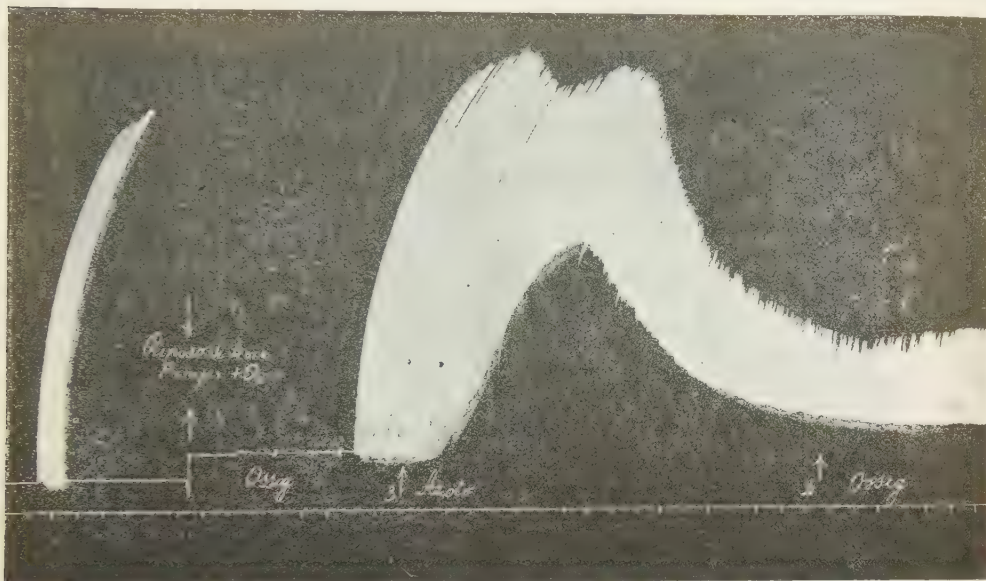


FIG. 5. — Preparato diaframmatico di cane, non immerso.

Dopo vari esperimenti (azione di CO_2 ecc.), il muscolo fu lasciato per circa 4 ore a riposo in liquido di Ringer ossigenato. Durante il riposo, il tono del preparato si elevò alquanto.

Quindi, tolto il liquido di Ringer, il muscolo fu di nuovo stimolato ritmicamente. Stimolazioni: 2 acc.; DR=120 mm.; frequenza degli stimoli unici: 30 al 1'.

Temper.: 32°C . Peso: gr. 10; tempo: 1'.

Prima che s'iniziasse alcuna contrattura, in 3, fu espulso l'ossigeno mediante una corrente di azoto, il quale gas continuò a passare fino a 4.

Sotto l'influenza dell'asfissia, il muscolo eseguì un'amplissima contrazione tonica, come dimostra il tracciato, riprodotto in questa figura.

Si noti che le contrazioni rapide sono notevolmente più alte di quelle che si veggono nel gruppo a sinistra della figura, e che esse aumentano in altezza sulla cima della contrazione tonica.

Tracciati dimostranti questo fatto io ho già riprodotto nell'a mia prima Memoria (loc. cit., figg. 11, 12 e 13 a pp. 552, 553 e 554), e nella mia Nota III⁽¹⁾ (loc. cit., fig. 2 a pag. 543); e potrei riprodurre ancora qui in gran numero, se non lo reputassi superfluo.

(¹) Rend. d. R. Accad. d. Lincei, (5) XXIV, pag. 539 (1915).

Queste contratture iniziali sono però sempre relativamente poco accennuate, quando non rappresentano l'inizio dell'accorciamento da rigidità, come qualche volta avviene: per es., nel caso della fig. 6.

Il preparato diaframmatico di gatto entra più facilmente in rigidità. In questo caso poi la temperatura relativamente alta, alla quale fu esposto il muscolo durante la sua attività, probabilmente accelerò la comparsa della

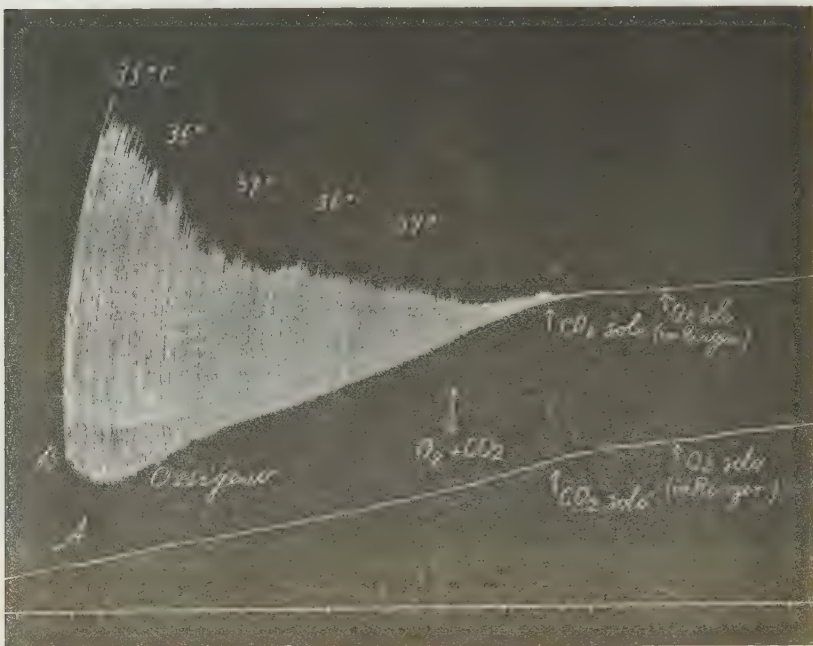


FIG. 6. — Preparati diaframmatici di gatto non immersi in liquido di Ringer, ma tenuti sempre in un ambiente umido saturo di ossigeno. Il preparato A non fu stimolato; il preparato B fu stimolato ritmicamente.

Stimolazioni: 2 acc.; DR=200 mm.; frequenza degli stimoli: 20 al 1'.

Temper.: variabile da 34° a 39° C. Peso: gr. 3; tempo: 1'.

rigidità. Tuttavia, dopo un lungo periodo di riposo in liquido di Ringer ossigenato, il muscolo riacquistò in piccola parte la sua eccitabilità, ed eseguì di nuove contrazioni ritmiche (non riprodotte nella figura) in risposta agli stimoli, senza che però si allungasse.

La fig. 6 dimostra che il muscolo A, non stimolato, tracciò una curva tonica approssimativamente parallela a quella del muscolo B. La curva A, però, presenta un'elevazione meno rapida della curva B.

Un fenomeno del tutto opposto alla contrattura iniziale è quello della iniziale diminuzione del tono che il preparato presenta sotto l'influenza della stimolazioni ritmiche. Anche a questo fenomeno io accennai nelle mie due

precedenti pubblicazioni (ved. prima Memoria, loc. cit., fig. 10 a pag. 551, e fig. 13 a pag. 554). Esso è però assai meglio rilevabile dalla fig. 7 della presente Nota.

In questo esperimento, mentre il tono del preparato B (tracciato inferiore) non si modificò affatto, il primo effetto delle stimolazioni ritmiche nel pre-



FIG. 7. — Preparati diaframmatici di cagna non immersi in liquido di Ringer. Il preparato B non fu mai stimolato e servì di controllo, come nel caso precedente. Il preparato A fu stimolato ritmicamente, sempre in ambiente umido saturo di ossigeno.

Stimolazioni: 2 acc.; DR=200 mm.; frequenza degli stimoli unici: 20 al 1'.

Temper.: 35° C. Peso: gr. 4; tempo: 1'.

parato A (tracciato superiore) fu un cospicuo abbassamento del tono, che durò per circa 2', al quale seguì un ritorno del tono al valore iniziale. Dopo questa restaurazione del tono, il muscolo incominciò di nuovo ad allungarsi, ma assai lentamente e assai meno che non nell'abbassamento precedente. Nel tutto insieme, la curva basale, o curva tonica, descrive prima

una rapida discesa, poi una rapida elevazione, alla quale segue una discesa lentissima.

I numerosi tracciati, che ho ottenuto, simili a questo, dimostrano che il fenomeno descritto occorre frequentemente. Posso aggiungere che esso occorre, però, solo nei preparati freschissimi e molto eccitabili, precedentemente non stimolati, e che esso non si ripresenta mai più, durante il corso dell'esperimento, nemmeno dopo che il muscolo è stato lasciato in perfetto riposo per molto tempo. Ciò fa supporre che il preparato diaframmatico si trova, all'inizio, in uno stato tonico considerevole, forse dipendente dalla superstite integrità funzionale delle giunzioni neuro-muscolari, stato che però si esaurisce per lo più in pochi minuti sotto l'azione delle contrazioni ritmiche provocate dagli stimoli unici.

Di un tono dei muscoli striati separati dal corpo non trovasi menzione nella vasta letteratura sull'argomento, e in generale l'esistenza di un tono autoctono di essi è negato, mentre ogni fenomeno tonico o d'inibizione del tono è attribuito ai centri nervosi ⁽¹⁾. Queste mie ricerche, invece, dimostrano che fenomeno tonici e d'inibizione del tono possono apparire o essere provocati anche in muscoli striati che più non conservano alcuna relazione con i centri nervosi, purchè essi siano freschi, cioè non affaticati, o purchè in essi sia dimostrabile che la funzione delle giunzioni neuromuscolari è ancora conservata.

Particolarmente nei casi in cui la contrazione tonica o la inibizione del tono coincide con un aumento in altezza delle simultanee contrazioni rapide, ritmicamente provocate da stimoli elettrici unici, mi pare che non si possa dubitare che le variazioni del tono siano da mettere in relazione con la esistenza, nel muscolo, di un materiale tonicamente contrattile diverso da quello al quale sogliono attribuirsi le contrazioni rapide: vale a dire col sarcoplasma.

Circa la genesi delle variazioni del tono provocate dai gas della respirazione, mi astengo dal formulare qualsiasi giudizio fino a che non abbia, nelle Note successive, esposto gli altri effetti dell'azione di quei gas.

⁽¹⁾ Ved. a questo proposito: G. A. Pari, *Sull'allungamento riflesso dei muscoli dello scheletro*, Zeit. f. allg. Physiol., IV, pag. 127 (1904); R. Nicolaides und S. Dantas, *Hemmende Fasern in den Muskelnerven*, Sitzungsber. d. k. pr. Akad. d. Wiss. in Berlin (physik.-math. Cl.), XVIII, pag. 364 (1907).

Matematica. — *Analisi metrica delle quasi-asintotiche sulle superficie degli iperspazi*. Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Sopra una superficie dello spazio ordinario si definisce linea asintotica quella che ha in ogni suo punto per piano osculatore il piano ivi tangente alla superficie: sicchè per definizione l'asintotica e la sezione prodotta dal piano tangente hanno questo per piano osculatore. Tuttavia non si osculano. Il Beltrami ha precisato il comportamento delle due curve nel punto comune dimostrando che il rapporto fra i loro raggi di prima curvatura ivi vale (quando si prendano nell'ordine scritto) $2/3$.

La seconda curvatura (torsione) dell'asintotica in un punto è uguale, per un teorema d'Enneper, in valore assoluto, alla radice quadrata della curvatura totale della superficie presa con segno contrario.

Questi due teoremi forniscono le curvature di un'asintotica.

2. Sopra una superficie (a due dimensioni V_2) di un iperspazio S_n ($n > 3$) non esistono in generale asintotiche. Si possono invece definire curve (*quasi-asintotiche*) con la proprietà che lo S_{n-1} osculatore ad una di esse sia tangente alla superficie nel punto d'osculatione (¹). Una quasi-asintotica è individuata quando se ne dia un elemento d'ordine $n-3$, E_{n-3} (un punto, la tangente, ..., lo S_{n-3} osculatore); mentre, se si fissa uno S_{n-1} tangente in un punto alla superficie, esistono due quasi-asintotiche uscenti dal punto che lo osculano.

Ciò risulta del resto immediatamente dalla loro equazione differenziale.

3. Indichiamo con $x, y, z_1, \dots, z_{n-2}$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di S_n ; e poniamo sulla superficie

$$z_1 = z_1(x, y), \dots, z_{n-2} = z_{n-2}(x, y).$$

Assumiamo, sulla curva che si studia, la x come variabile indipendente; bisogna perciò determinare y come funzione di x .

Scriviamo inoltre

$$\frac{\partial^{h+k} z_i}{\partial x^h \partial y^k} = z_i^{(h,k)} \quad (i = 1, \dots, n-2) \quad ; \quad y^{(h)} = \frac{d^h y}{dx^h}.$$

L'equazione differenziale delle quasi-asintotiche è

(¹) Vedansi le mie Note: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* [Atti R. Accad. Scienze di Torino, vol. XLVIII (1912-13)], nn 6, 7; *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* [Rend. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXVII (1914)]; *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* [Rend. R. Istituto Lombardo, ser. II, vol. XLVII (1914)].

Inoltre, essendo

$$\frac{dz_i}{dx} = z_i^{(10)} + z_i^{(01)} y' = 0,$$

si ha pure

$$(4) \quad z_1^{(10)} = z_2^{(10)} = \dots = z_{n-2}^{(10)} = 0,$$

e infine, da

$$\frac{d^2 z_{n-2}}{dx^2} = z_{n-2}^{(20)} + 2z_{n-2}^{(11)} y' + z_{n-2}^{(02)} y'^2 + z_{n-2}^{(01)} y''$$

si ricava, per la (3), nell'origine

$$(5) \quad z_{n-2}^{(20)} = 0.$$

Altre relazioni si potrebbero trarre dalle (2) fra le derivate delle z_i , ma esse non ci occorrono. Solo importa notare che, in conseguenza di quelle, nessuna di dette derivate si annulla, oltre quelle notate, nell'intorno dell'origine: quindi l'annullarsi di qualche altra derivata va interpretato come proveniente da singolarità della curva o della superficie; ciò che escludiamo.

5. Le equazioni (2) servono a definire pure la sezione iperpiana prodotta da $z_{n-2} = 0$, e tangente alla quasi-asintotica: quindi su questa e sulla sezione sono uguali i valori di y'' , y'' , ..., $y^{(n-2)}$; le due curve hanno in comune *tutti* gli spazi osculatori nel punto.

Se inoltre si tien presente che la curvatura ν -esima è data da (1)

$$(6) \quad \frac{1}{\varrho_\nu^2} = \frac{M_{\nu-1} M_{\nu+1}}{M_1 M_\nu^2} \quad M_0 = 1,$$

ove

$$(7) \quad M_\nu = \frac{1}{(dx)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz_1 & \dots & dz_{n-2} \\ d^2x & d^2y & d^2z_1 & \dots & d^2z_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^\nu x & d^\nu y & d^\nu z_1 & \dots & d^\nu z_{n-2} \end{vmatrix}^2,$$

si vede che le due curve hanno in comune nell'origine le prime $n - 3$ curvature.

6. Cerchiamo ora la $(n - 2)$ -esima curvatura di ciascuna: bisogna perciò trovare il valore di $y^{(n-1)}$ sulla quasi-asintotica e quello sulla sezione iperpiana che indicheremo con $\bar{y}^{(n-1)}$.

Per la quasi-asintotica si dovrà trarre $y^{(n-1)}$ per derivazione dalla (1); per la sezione dalla $\bar{d}^n z_{n-2} = 0$ (la lineetta sopra il d sta ad indicare che l'operazione è eseguita sulla sezione).

Derivando la (1), si ha

(1) Jordan, Comptes Rendus, tomo 79.

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} 1 & z_1^{(01)} & . & . & . & z_{n-2}^{(01)} \\ d^2 y & d^2 z_1 & . & . & . & d^2 z_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ d^{n-2} y & d^{n-2} z_1 & . & . & . & d^{n-2} z_{n-2} \\ d^{n-1} y & d^{n-1} z_1 & . & . & . & d^{n-1} z_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z_1^{(11)} & . & . & . & z_{n-2}^{(11)} \\ d^2 y & d^2 z_1 & . & . & . & d^2 z_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ d^{n-2} y & d^{n-2} z_1 & . & . & . & d^{n-2} z_{n-2} \\ d^{n-1} y & d^{n-1} z_1 & . & . & . & d^{n-1} z_{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{dx} \begin{vmatrix} 1 & z_1^{(01)} & . & . & . & z_{n-2}^{(01)} \\ d^2 y & d^2 z_1 & . & . & . & d^2 z_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ d^{n-2} y & d^{n-2} z_1 & . & . & . & d^{n-2} z_{n-2} \\ d^n y & d^n z_1 & . & . & . & d^n z_{n-2} \end{vmatrix} = 0;$$

quindi, nell'origine,

$$z_{n-2}^{(11)} d^2 y d^3 z_1 \dots d^{n-2} z_{n-4} d^{n-1} z_{n-3} = d^2 y d^3 z_1 \dots d^{n-2} z_{n-4} d^n z_{n-2} \cdot z_{n-3}^{(01)} / dx,$$

ovvero

$$(8) \quad z_{n-2}^{(11)} \frac{d^{n-1} z_{n-3}}{dx^{n-1}} = z_{n-3}^{(01)} \frac{d^n z_{n-2}}{dx^n}.$$

È questa l'equazione che fornisce $y^{(n-1)}$ sulla quasi-asintotica $[y^n$ non figura, come apparirebbe, a secondo membro, perchè si è dimostrato (3) essere $z_{n-2}^{(01)} = 0]$. In $\frac{d^{n-1} z_{n-3}}{dx^{n-1}}$ compare $y^{(n-1)}$ nel termine $z_{n-3}^{(01)} y^{(n-1)}$; in $\frac{d^n z_{n-2}}{dx^n}$ nel termine $n z_{n-2}^{(11)} y^{(n-1)}$.

Invece $\bar{y}^{(n-1)}$ sulla sezione iperpiana si ha dall'equazione

$$(9) \quad \frac{\bar{d}^n z_{n-2}}{dx^n} = 0;$$

$\bar{y}^{(n-1)}$ vi figura nel termine $n z_{n-2}^{(11)} \bar{y}^{(n-1)}$.

Anzi $\frac{d^n z_{n-2}}{dx^n}$ e $\frac{\bar{d}^n z_{n-2}}{dx^n}$ non differiscono che per i termini detti, essendo la loro formazione la stessa ed avendo $y'', \dots, y^{(n-2)}$ gli stessi valori sulle due curve. Quindi, sottraendo la (9) dalla (8), si ha, sopprimendo il fattore comune $z_{n-2}^{(11)}$ non nullo (n. 4, in fine),

$$\frac{d^{n-1} z_{n-3}}{dx^{n-1}} = n z_{n-3}^{(01)} (y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}).$$

Formiamoci analogamente $\frac{\bar{d}^{n-1} z_{n-3}}{dx^{n-1}}$ sulla sezione. Questa espressione

non differisce dalla precedente che per avere $z_{n-3}^{(01)} \bar{y}^{(n-1)}$ in luogo di $z_{n-3}^{(01)} y^{(n-1)}$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1} z_{n-3}}{dx^{n-1}} &= \frac{d^{n-1} z_{n-3}}{dx^{n-1}} - z_{n-3}^{(01)} y^{(n-1)} + z_{n-3}^{(01)} \bar{y}^{(n-1)} \\ &= (n-1) z_{n-3}^{(01)} (y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Il rapporto dei raggi di $(n-2)$ -esima curvatura delle due curve vale, secondo le (6) e (7),

$$\frac{\varrho_{n-2}}{\bar{\varrho}_{n-2}} = \frac{d^{n-1} z_{n-3}}{d^{n-1} \bar{z}_{n-3}} = \frac{n-1}{n}.$$

Una quasi-asintotica e la sezione iperpiana prodotta dal suo S_{n-1} osculatore (nel punto e secondo il ramo tangente alla quasi-asintotica) hanno in comune tutti gli spazi osculatori e le prime $n-3$ curvature. Le $(n-2)$ -esime curvature stanno fra loro nel rapporto $(n-1)/n$.

È questa l'estensione cercata del teorema di Beltrami alle quasi-asintotiche. La dimostrazione qui data presuppone $n > 3$ perchè z_{n-3} e \bar{z}_{n-3} debbono esistere; quindi non potrebbe applicarsi allo spazio ordinario.

Meccanica. — *Sull'equilibrio elastico di un solido omogeneo isotropo limitato da una superficie piana.* Nota della dott.^{ssa} ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Indichiamo con $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ tre funzioni, e vediamo di determinarle in modo che verifichino in ogni punto del semispazio, limitato dal piano di equazione $z=0$ che contiene la direzione positiva dell'asse z , le tre equazioni simultanee dell'equilibrio elastico, quando non agiscono forze di massa (caso al quale ci si può sempre ridurre),

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial x} + L \nabla^2 u = 0 \\ (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial y} + L \nabla^2 v = 0 \\ (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial z} + L \nabla^2 w = 0 \end{array} \right. \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

e in ogni punto del piano limite le altre

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = U(x, y) \\ v(x, y, 0) = V(x, y) \\ w(x, y, 0) = W(x, y), \end{array} \right.$$

dove $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$ rappresentino funzioni *dite ad arbitrio* in modo da assicurare la convergenza degli integrali di Fourier che ci converrà adoperare.

Poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha d\beta (A + i\alpha H z) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ v(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha d\beta (B + i\beta H z) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ w(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha d\beta (C + i\gamma H z) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \end{cases}$$

e stabiliamo che sia

$$\gamma = \pm i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

e che le funzioni $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$, (α, β) , da determinarsi, siano legate dalla relazione

$$\gamma H = - \frac{K + L}{K + 3L} (\alpha A + \beta B + \gamma C).$$

Allora possiamo assicurarci che le grandezze (2) verificano le equazioni (1), supponendo, naturalmente, che le funzioni $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$, $H(\alpha, \beta)$ vengano determinate in modo da permettere le relative derivazioni. È facile vedere così, che $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$, ricavate dalle equazioni (2), valgono, prescindendo dall'operazione $\int \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha d\beta$,

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x, y, z) = - 2\alpha \gamma H(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ \Delta^2 v(x, y, z) = - 2\beta \gamma H(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ \Delta^2 w(x, y, z) = - 2\gamma^2 H(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \end{cases}$$

Ma θ vale evidentemente

$$\theta = i(\alpha A + \beta B + \gamma C + \gamma H) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\theta = i \left[\frac{K + 3L}{K + L} \gamma H + \gamma H \right] e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\theta = - 2i \frac{L}{L + K} \gamma H e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)};$$

dunque le (1) risultano subito verificate.

Bisogna ora determinare $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ in modo che gli integrali e le derivate abbiano realmente significato e che siano soddisfatte le condizioni (1'). Se assumiamo

$$(3) \quad \begin{cases} A(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\xi d\eta \\ B(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} V(\xi, \eta) e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\xi d\eta \\ C(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W(\xi, \eta) e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\xi d\eta, \end{cases}$$

pur valendo, per U, V, W , le ipotesi poco restrittive che assicurano la validità della formula di Fourier, noi vediamo subito che anche le condizioni (1') risultano verificate.

Matematica. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Nota II ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI CIVITA.

4. UNA FORMOLA PRELIMINARE. — Richiamiamo la formola (9)

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{v} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \mathbf{n}.$$

Sia $\varphi(P)$ una funzione generica; moltiplicando scalarmente la precedente per $\text{grad } \varphi$ e notando che

$$[\text{grad } \varphi(Q)] \times \mathbf{n}' = \frac{d\varphi(Q)}{dn'} \quad , \quad [\text{grad } \varphi(Q)] \times \mathbf{n} = \frac{d\varphi(Q)}{dn} ,$$

si ottiene

$$(17) \quad \frac{d\varphi(Q)}{dn'} = \frac{d\varphi(Q)}{dn} - \mathbf{v} \times \text{grad } \varphi(Q) + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \frac{d\varphi(Q)}{dn} .$$

D'altra parte, applicando alla funzione $\frac{d\varphi(Q)}{dn}$ la formola (16), si ha

$$\frac{d\varphi(Q')}{dn'} = \frac{d\varphi(Q)}{dn'} + \varepsilon(Q) \frac{d}{dn_0} \frac{d\varphi(Q)}{dn'} ;$$

per cui, sostituendo al primo termine del secondo membro di questa la sua espressione (17), si ha in definitiva, con la solita approssimazione,

$$(18) \quad \frac{d\varphi(Q')}{dn'} = \frac{d\varphi(Q)}{dn} - \mathbf{v} \times \text{grad } \varphi(Q) + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \frac{d\varphi(Q)}{dn} + \varepsilon \frac{d^2\varphi(Q)}{dn^2} ,$$

formola che sfrutteremo tra poco.

⁽¹⁾ Vedi la Nota I, questi Rendiconti, vol. XXV, pag. 413.

5. IL PROBLEMA DI NEUMANN NEL CAMPO S' . — Si tratta di determinare una funzione

$$W = W(P')$$

dei punti P' di S' , regolare ed armonica e tale che sulla superficie σ' la sua derivata normale assuma valori prefissati $\frac{dV(Q')}{dn'}$.

Cominciamo dal costruire una funzione $W_0(P)$ armonica e regolare in S , e tale che, in un generico punto Q di σ , la sua derivata normale assuma il valore che $\frac{dW(Q')}{dn'}$ deve avere nel corrispondente punto Q' di σ' ; sia cioè

$$(19) \quad \frac{dW_0(Q)}{dn} = \frac{dW(Q')}{dn'}.$$

Siccome si immagina di saper risolvere il problema di Neumann nel campo S , si avrà, applicando alla W_0 la formola (4) (a meno di una inessenziale costante additiva),

$$(20) \quad W_0(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{dW_0(Q)}{dn_Q} \mathbf{r}(P, Q) d\sigma_Q.$$

Determinata, a meno di una inessenziale costante additiva, la funzione W_0 , in tal guisa, si costruisca una seconda funzione $W_1(P)$ regolare e armonica in S e tale che sopra σ la sua derivata normale assuma i valori seguenti:

$$(21) \quad \frac{dW_1(Q)}{dn} = -\mathbf{v} \times \text{grad } W_0(Q) + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \frac{dW_0(Q)}{dn} + \varepsilon \frac{d^2 W_0(Q)}{dn^2}.$$

Applicando, ancora, la formola (4) alla funzione W_1 , si avrà

$$(22) \quad W_1(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{dW_1(Q)}{dn} \mathbf{r}(P, Q) d\sigma_Q,$$

dove, si intende portata al posto di $\frac{dW_1(Q)}{dn}$, la sua precedente espressione (21).

Consideriamo ora la funzione

$$(23) \quad W(P) = W_0(P) - W_1(P).$$

Per quanto si è precedentemente detto, essa è armonica e regolare in S ; e nei punti Q di σ la sua derivata normale assume i valori

$$(24) \quad \frac{dW(Q)}{dn} = \frac{dW_0(Q)}{dn} + \mathbf{v} \times \text{grad } W_0(Q) - (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \frac{dW_0(Q)}{dn} - \varepsilon \frac{d^2 W_0(Q)}{dn^2}.$$

Ammettiamo che la funzione $W(P)$, definita in S , sia prolungabile anche in S' (ciò avviene sicuramente se S' appartiene ad S).

Vediamo, in tale ipotesi, quali valori va ad assumere la derivata normale della funzione W nei punti Q' di σ' .

Applicando alla funzione W la formula (18) avremo

$$(25) \quad \frac{dW(Q')}{dn'} = \frac{dW(Q)}{dn} - \mathbf{v} \times \text{grad } W(Q) + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \frac{dW(Q)}{dn} + \varepsilon \frac{d^2 W(Q)}{dn^2}.$$

Si noti che, come risulta dalla (23), tenuto conto delle (20), (21), (22) e della (8), la funzione W è differenza di una parte finita — W_0 — e di una parte di primo ordine — W_1 —; perciò dalle (25) e (24), a meno di quantità di ordine superiore, si ha

$$\frac{dW(Q')}{dn'} = \frac{dW_0(Q)}{dn},$$

che è la (19).

Dunque la funzione W , definita dalla (23) e considerata nello spazio S' , risolve il problema di Neumann in questo campo.

6. IL PROBLEMA DI DIRICHLET E IL PROBLEMA DI NEUMANN IN UNO SFEROIDE. — Sia la superficie σ una sfera di raggio R e di centro O .

In tal caso l'equazione (1) di σ diviene

$$(26) \quad f(Q) = (Q - O)^2 - R^2 = 0;$$

e sopra σ stessa è

$$\text{grad } f = 2(Q - O) \quad , \quad |\text{grad } f| = 2R.$$

Se si considera p. es. il problema interno, il vettore n dev'essere rivolto sempre verso l'interno di σ , per cui, applicando la (6), si ha

$$(27) \quad \mathbf{n} = \frac{-\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{O - Q}{R}.$$

Essendo poi

$$(28) \quad \frac{df}{dn} = -\text{grad } f \times \mathbf{n} = -\frac{2}{R} (Q - O)^2 = -2R,$$

l'equazione (5) di σ' (*sferoide*) diviene

$$(29) \quad (Q' - O)^2 + 2R\varepsilon - R^2 = 0.$$

La (8) diviene, nel caso attuale,

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \varepsilon$$

e quindi la (9) definisce n'

$$(30) \quad n' = n + \text{grad } \varepsilon - n \frac{d\varepsilon}{dn},$$

in ogni punto dello sferoide. La (21), in conseguenza, si modifica nel modo seguente:

$$\frac{dW_1(Q)}{dn} = (\text{grad } \varepsilon) \times (\text{grad } W_0) - \frac{d\varepsilon}{dn} \cdot \frac{dW_0}{dn} + \varepsilon \frac{d^2 W_0}{dn^2}.$$

Per la sfera sono note tanto la funzione di Green quanto la funzione di Neumann. Il che significa che si sanno risolvere i problemi di Dirichlet e di Neumann per lo spazio sferico (sia interno, come abbiamo supposto qui, sia esterno). Le nostre conclusioni consentono di dire che si sanno risolvere questi problemi anche per gli sferoidi.

Prima di fare delle applicazioni dei risultati acquisiti, mostrerò come il procedimento indicato possa presentarsi vantaggioso trattando i problemi armonici in campi che provengono dai classici per deformazione continua.

Ma di ciò in una prossima comunicazione.

Geofisica. — *Applicazione della teoria delle onde superficiali all'analisi dei sismogrammi.* Nota II di L. DE MARCHI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nella precedente comunicazione ⁽¹⁾ ho dimostrato la possibilità della formazione sulla superficie piana di un solido elastico, non della sola *onda di Rayleigh* propagantesi con una velocità che è circa $\frac{2}{10}$ della velocità di propagazione delle onde trasversali, ma di infinite onde propagantesi con velocità diversa, definite dalla formola

$$(1) \quad V = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho} (1 + \mathcal{L})}$$

per tutti i valori di \mathcal{L} compresi fra $-\frac{1}{2}$ e -1 .

Questo risultato può avere particolare significato per la spiegazione dei fenomeni sismici e dei tracciati sismografici. Volendone fare tale applicazione, noi ammettiamo però implicitamente che i risultati ottenuti per il piano siano senz'altro applicabili alla superficie sferica, e che le rocce degli strati superficiali abbiano ovunque le stesse proprietà elastiche definite da un valore costante del modulo e del rapporto del Poisson.

(¹) Questi Rend. pag. 309.

Quanto alla prima ammissione, essa appare abbastanza legittima, considerandosi il fenomeno come limitato a una crosta superficiale di una sfera di raggio grandissimo. Quanto alla seconda, osserviamo che l'eterogeneità elastica degli strati superficiali della Terra (e, aggiungiamo, l'irregolare conformazione della superficie), e in particolare la presenza di grandi cavità piene d'acqua e di grandi rilievi montuosi, complicano certamente il fenomeno in modo inaccessibile a qualsiasi teoria; ma non possono modificarne quei caratteri che io ho specialmente di mira nelle seguenti applicazioni.

2. Anzitutto, la formazione di onde propagantisi con velocità diversa dà la spiegazione più naturale del fatto che, mentre generalmente nella regione epicentrale e pleistosistica l'oscillazione del terreno, per ogni scossa, è della durata di pochi minuti, e un terremoto è formato dalla successione discontinua di scosse distinte i tracciati sismografici raccolti a grande distanza ci rappresentano invece una successione continua di oscillazione che si mantiene talvolta per più di un'ora. A spiegare questo fatto si ricorre a varie ipotesi non comprovate, come riflessioni e rifrazioni dei raggi sismici sulla superficie esterna del globo e sulle superficie interne di discontinuità. Si suppone anche l'esistenza di una dispersione ammettendo come probabile una dipendenza della velocità di propagazione dalla lunghezza del periodo dell'onda, a spiegare la quale si afferma che si dovrebbe tener conto di termini non lineari nelle equazioni generali della elasticità ⁽¹⁾.

Ammessa l'esistenza di onde propagantisi con velocità variabili fra 0 ($\mathcal{L} = -1$) e quella, $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, delle onde trasversali ($\mathcal{L} = -\frac{1}{2}$) si comprende come queste onde si separino durante la propagazione, determinando sismogrammi tanto più prolungati quanto maggiore è la distanza, e sovrapponendosi le onde generate da scosse successive in modo da produrre un sismogramma continuo. Ma la formula (4) ci dice che effettivamente questa separazione delle onde durante il tragitto si compie per un fenomeno di dispersione, in quanto la velocità di propagazione dipende dalla lunghezza e dal periodo dell'onda.

3. Ricordiamo, infatti, che \mathcal{L} è definita dalla formola (17) della precedente Nota

$$(2) \quad -\mathcal{L} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\gamma_1^2}{a^2} - \frac{\lambda}{2\mu}.$$

γ_1 è il coefficiente di z nei fattori $e^{\gamma_1 z}$, $e^{-\gamma_1 z}$ che entrano nelle espressioni degli spostamenti longitudinali, e può chiamarsi *coefficiente di smorzamento verticale delle onde longitudinali*, in quanto esprime la legge con cui

⁽¹⁾ Galitzin (Fürst B.), *Vorlesung über Seismometrie* (Deutsche Bearbeitung von Hecker), Leipzig, Teubner, 1914, pp. 150-151.

si attenuano entro la crosta terrestre le onde longitudinali ascendenti dalla profondità e discendenti dalla superficie. Esso dipende esclusivamente dalla costituzione degli strati superficiali. e può considerarsi, caso per caso, come una costante.

α è il coefficiente di x nell'argomento $\sigma = (\alpha x - \varepsilon t)$ del moto armonico, ed è $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, come $\varepsilon = \frac{2\pi}{T}$, dove L è la lunghezza d'onda e T il periodo. Sostituendo questa espressione di α nella (2), e l'espressione di \mathcal{L} , così ottenuta, nella (1), si ha, ponendo $\lambda = \mu$,

$$(3) \quad V = \sqrt{\frac{3\mu}{\varrho} \left(1 - \frac{\gamma_1^2 L^2}{4\pi^2}\right)}.$$

Quindi *le onde lunghe si propagano più lentamente delle onde brevi.*

D'altra parte, essendo $L = VT$, quest'equazione si può anche scrivere

$$(4) \quad V = \sqrt{\frac{3\mu}{\varrho} \frac{1}{1 + \frac{3\mu}{\varrho} \frac{\gamma_1^2 T^2}{4\pi^2}}}.$$

Quindi *le onde si propagano tanto più rapidamente quanto più breve è il periodo.*

Le onde più rapide, per $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}$, si verificano quando

$$L = \frac{2\pi}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad T = \frac{2\pi}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\varrho}{\mu}}.$$

Le onde ferme, per $\mathcal{L} = -1$, cioè le deformazioni fisse che abbiamo visto essere spostamenti orizzontali normali alla propagazione delle onde, sarebbero di lunghezza $L = \frac{2\pi}{\gamma_1}$, di periodo naturalmente infinito.

Data γ_1 , si possono quindi formare soltanto onde di lunghezza compresa fra i valori $\frac{2\pi}{\gamma_1}$ e $0.8165 \frac{2\pi}{\gamma_1}$; ma poichè durante un lungo tragitto l'onda può attraversare regioni alle quali possono rispondere valori diversissimi di γ_1 , si comprende come i limiti entro i quali può variare la lunghezza d'onda possano essere molto più estesi. Le lunghezze d'onda quali si deducono dai sismogrammi, determinando il periodo o il tempo del percorso dall'epicentro, rispondono a velocità medie, che possono essere diversissime a seconda della distanza e della direzione di provenienza, in quanto dipendono dalla conformazione e costituzione delle regioni attraversate. Tuttavia queste lunghezze d'onda potranno servire a determinare in via approssimativa il valore di γ_1 . Ponendo p. es. $L = 150$ km, valore dedotto da Omori da 11 grandi sismi per la fase iniziale delle onde principali, e pone

$L = 0,9 \frac{2\pi}{\gamma_1}$, di qui si ricaverebbe $\gamma_1 = \frac{7.5}{150} = 0.05$ circa, essendo assunto il chilometro come unità di lunghezza. Il fattore di smorzamento verticale sarebbe quindi $e^{-0.05z} = 10^{-0.0217z}$, pel quale le ampiezze delle oscillazioni sarebbero ridotte a $\frac{1}{10}$ dei valori superficiali, e quindi l'intensità assoluta a $\frac{1}{100}$, a meno di 50 chilometri di profondità. Per terreni molto disagregati, alluvionali, acquitrinosi, il valore di γ_1 sarà molto maggiore e si può spiegare quindi la formazione di onde molto più brevi e a periodo molto lungo e quindi a lenta propagazione. Così si possono spiegare le *onde visibili*, delle quali il Montessus de Ballore dà numerosi esempî nella sua *Science seismologique* (cap. XIII).

A grande distanza non saranno però percepite se non le onde di grande lunghezza e velocità, che si propagano negli strati più profondi e compatti, e che per la minor durata del tragitto sono meno smorzate. Esse rispondono a valori di ξ compresi in un intervallo molto più ristretto; ma verranno tuttavia separate per dispersione. Questa ha i caratteri della *dispersione anomala*, perchè le onde più brevi si propagano più rapidamente delle più lunghe; alla possibilità di una tale dispersione anomala accennò già, in base allo studio dei sismogrammi, il sismologo giapponese Nagaoka.

4. Vediamo come i principî svolti si possano applicare nell'analisi di un sismogramma. Secondo Omori, in un sismogramma di grande distanza sono nettamente distinte delle fasi successive: Primi Tremiti (P), Secondi Tremiti (S). Onde principali che si distinguono in varie fasi, delle quali la prima (ℓ) di poche onde a lungo periodo, la seconda di periodo alquanto più breve e più ampio, la terza (L) di periodo ancor più breve e di ampiezza ancor maggiore, fase alla quale seguono per lungo tempo oscillazioni di ampiezza sempre decrescente e di periodo variabile.

Nella seguente tabella sono dati i tempi di arrivo delle onde P, S, ℓ , L a varie stazioni in corrispondenza al grande terremoto indiano del 4 aprile 1905, secondo i dati di Omori riportati da Knott (¹).

Scelgo solo le stazioni per le quali vi sono i dati completi, esprimendone la distanza in chilometri invece che in arco. Secondo l'osservazione fatta da Knott (²), aumento di un minuto i tempi di arrivo dati da Omori, tempi espressi da Omori in primi e decimi di primo dopo l'istante della scossa nell'epicentro e qui trasformati in secondi:

(¹) Knott (Cargill Gilston), *The Physics of the Earthquake Phenomena*, Oxford Clarendon Press, 1908, pag. 215.

(²) Loc. cit., pp. 213-214. Omettiamo i dati per Samoa, perchè il tempo d'arrivo di P e di S è evidentemente erroneo.

Stazione	Distanza Km.	Tempi di arrivo			
		P	S	<i>l</i>	L
Taihoku (Formosa) . . .	4379	450"	816"	1140"	1410"
Lipsia	5580	534	954	1428	1818
Tokyo	5709	558	996	1458	1956
Gottinga.	5744	546	984	1434	1830
Quarto Castello	5764	540	972	1428	1866
Birmingham	6427	648	1146	1608	2136
Victoria (Columbia ingl.) .	10845	1020	1452	2892	3624
Toronto	11266	1008	1464	2892	3624
Washington	11686	1116	2022	2748	3690
Cheltenham	11696	1134	2016	2748	3678
Tacubaya (Messico) . . .	14280	1296	2298	3240	4320

In base a questi dati le velocità medie di propagazione risultano

Velocità km/sec =	V_P	V_S	V_l	V_L
	9.73	5.37	3.84	3.12
	10.45	5.85	3.91	3.07
	10.23	5.73	3.92	2.91
	10.52	5.84	4.00	3.14
	10.67	5.93	4.04	3.09
	9.92	5.61	4.00	3.01
	10.63	7.47	3.75	2.98
	11.18	7.69	3.89	3.11
	10.48	5.78	4.25	3.17
	10.31	5.80	4.26	3.19
	11.02	6.21	4.41	3.31

L'accordo dei dati per ciascuna velocità è, compatibilmente con questo genere di determinazioni, molto soddisfacente. I valori medi sono

V_P	V_S	V_l	V_L
10.47	6.12	4.02	3.10

Il rapporto $V_P:V_S = 1.71$ è assai prossimo al valore teorico $\sqrt{3}$ tra la velocità delle onde longitudinali e quella delle onde trasversali, quando si assuma pel coefficiente di Poisson il valore $1/4$. Possiamo quindi assumere il valore di V_S come esprime la velocità $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ delle onde trasversali e

quindi, per ogni altra V , è $V:V_s = \sqrt{2(1+\lambda)}$, donde si ricava

$$-\lambda = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{V_s^2}.$$

Per i due gruppi d'onda l e L si ottiene così:

$$-\lambda_l = 0.788 \quad , \quad -\lambda_L = 0.872.$$

Quindi, anche immediatamente dopo i secondi tremiti, si hanno onde di lunghezza maggiore e di velocità minore di quelle che competerebbero alle onde di Rayleigh. Le onde l si possono considerare come appartenenti allo stesso treno d'onde al quale appartengono i secondi tremiti, che probabilmente riassumono un complesso d'onde di lunghezza poco diversa e crescente col tempo. Naturalmente, a non grande distanza dall'origine queste onde sono mescolate, come lo dimostra il diagramma del terremoto delle Calabrie 1905. che Montessus de Ballore ⁽¹⁾ ricava dalla Memoria di Angenheister. Esso dimostra la sovrapposizione di onde lunghe, del periodo di circa 40'' (onde l) ai secondi tremiti, in un sismogramma raccolto a 1000-1500 km. dall'origine. A più di 5000 le onde lunghe rimangono indietro e nettamente separate dai secondi tremiti.

Invece il passaggio dalle onde l alle onde L , più brevi e a periodo più rapido, segnerebbe, secondo la teoria, il passaggio da un treno d'onda, formatosi probabilmente in un'unica scossa, a un treno di formazione successiva, perchè altrimenti non si potrebbe spiegare la presenza di onde più rapide succedenti a onde più lente. Questo supposto è confermato anche dalla direzione delle oscillazioni osservate da Omori in occasione del citato terremoto indiano del 1905. Ammettendo che le onde si propaghino da un punto all'altro lungo il cerchio massimo, tanto per le stazioni giapponesi quanto per le stazioni europee le vibrazioni longitudinali dovevano essere presso a poco in direzione E-W, e le trasversali in direzione N-S, mentre nella stazioni messicane e americane le due direzioni erano invertite. Ora dalla tabella riportata da Knott ⁽²⁾ risulta che nei primi due gruppi di stazioni le direzioni di vibrazione rispondenti ai vari gruppi erano

onde =	P	S	l	L
direzioni di vibraz. =	E	N	N	E

e, negli altri due gruppi,

N	E	E	N
---	---	---	---

Quindi i primi tremiti erano longitudinali; i secondi tremiti e le onde l

⁽¹⁾ Op. cit., pag. 363, fig. 120.

⁽²⁾ Op. cit., pag. 239.

trasversali; le onde L ancora longitudinali ⁽¹⁾. Queste ultime, più ampie di tutte, corrispondono alla scossa epicentrale principale.

Come già si disse, fra le onde *l* e le L sono intercalate delle onde di periodo e di ampiezza intermedie, e che dovrebbero quindi essere più rapide delle *l* e più lente delle L. Infatti, secondo le conclusioni di Angenheister, a distanze grandissime, verso l'antipodo dell'epicentro, le onde L passerebbero avanti ad esse ⁽²⁾. Esse sono probabilmente onde premonitricie delle onde L, che partono dall'epicentro prima di queste, ma sono da esse raggiunte dopo un lungo percorso.

Parmi che la teoria venga così a dar ragione, in modo abbastanza spontaneo, dei caratteri fondamentali dei sismogrammi.

Fisica. — *Sulla forma della corrente secondaria ottenuta dai rocchetti di induzione.* Nota di O. M. CORBINO e G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In un precedente lavoro sul funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff con gli interruttori elettrolitici esaminammo, fra i diversi elementi elettrici, la forma della corrente secondaria, servendoci dell'azione esercitata sul tubo di Braun da una piccola bobina bene isolata e percorsa dalla corrente in esame. La forma della corrente ottenuta con tal metodo rivelò la presenza di oscillazioni bilaterali susseguenti allo impulso principale di forma triangolare.

Questo risultato è in contraddizione con quanto uno di noi aveva osservato studiando la forma della corrente con un metodo diverso, applicabile ai piccoli rocchetti di induzione. Invero era stato allora stabilito che la corrente secondaria di apertura non si inverte mai, nè con l'interruttore elettrolitico, nè con gli interruttori meccanici, quando essa deve traversare una scintilla o un tubo a scariche.

Avendo perciò dei sospetti sulla esistenza reale delle oscillazioni bilaterali constatate, abbiamo eseguito nuove e più ampie ricerche con diversi metodi di studio di questo tipo di correnti, caratterizzate dalla variazione rapidissima e dalla relativamente piccola intensità. E abbiamo così potuto stabilire che lo impiego di una piccola bobina isolata e agente sul tubo di Braun è da scartare, come conducente a risultati assolutamente inesatti, per una ragione che, a prima vista, non sembrava dovesse avere così grande influenza.

(¹) Solo nei sismogrammi di Quarto Castello e di Lipsia anche le vibrazioni L erano da N, cioè longitudinali.

(²) Montessus de Ballore, op. cit., pag. 364. Quarto principio di Angenheister,

Avviene invero, che l'autoinduzione e la capacità distribuite lungo l'avvolgimento della bobinetta danno origine in questa, a causa delle rapide variazioni della corrente che la traversa, a oscillazioni proprie interne, risultandone una azione magnetica complessiva, sul tubo di Braun, che non è più corrispondente alla legge di variazione della corrente secondaria esaminata. Il fenomeno si accentua se della bobinetta si utilizza solo una parte dell'avvolgimento, mentre la rimanente, connessa con la parte utilizzata, ne aumenta la capacità.

Per lo studio di correnti così rapidamente variabili non esiste, a nostro parere, mezzo più sicuro che l'esame della legge di variazione della differenza di potenziale esistente agli estremi di una resistenza non induttiva. Questo esame può farsi per mezzo dello stesso tubo Braun, munito delle laminette per la deviazione elettrostatica dei raggi catodici, secondo i suggerimenti di Wehnelt. Procedendo in questo modo, e servendoci, come resistenza, di un tubetto con soluzione di ioduro di cadmio, noi abbiamo potuto ottenere la vera forma della corrente secondaria, e confermare, in massima, anche coi grandi rocchetti i risultati ottenuti da uno di noi ⁽¹⁾, e cioè la unilateralità delle correnti, e la loro forma rettilinea, in funzione del tempo, quando la corrente traversa una scintilla o un tubo a scarica; lungo la retta si svolgono le oscillazioni unilaterali del sistema primario-secondario, quando si ricorre agli interruttori meccanici.

I risultati da noi ottenuti insieme con uno studio complesso degli elementi elettrici da cui dipende la produzione dei raggi X, verranno comunicati in una Memoria di prossima pubblicazione.

Chimica. — *Anidridi della tirosina* ⁽²⁾. Nota di F. GRAZIANI, presentata dal Corrispondente L. BALBIANO.

Lo studio del comportamento di alcuni acidi α -amidati riscaldati con glicerina o con altri agenti moderatori del calore ⁽³⁾, mi portò a constatare, per il caso della tirosina riscaldata con glicerina a 175°-185°, la formazione di due composti principali, uno solubile in alcool assoluto bollente, e l'altro insolubile: il primo corrispondeva, all'analisi, ad un'anidride della tirosina; del secondo non mi occupai per allora, pure osservando che probabilmente esso era un'altra anidride, forse identica alla sostanza che il Löw ottenne da un latte conservato per 8 anni, e che si presentava in globetti duri,

⁽¹⁾ O. M. Corbino, *Ricerche teoriche e sperimentali sul rocchetto di Ruhmkorff*. N. Cimento, tom. 15, pp. 202-203 (1908).

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

⁽³⁾ Questi Rendiconti, 1915, I, 822 e 936.

insolubili in acqua bollente ed in alcool, e che bollita con potassa caustica dava tirosina: il L \ddot{o} w la ritenne un'anidride della tirosina⁽¹⁾.

Soltanto ora ho potuto condurre a termine questo studio, e ne rendo noti qui i risultati.

Per la preparazione delle sostanze che mi interessavano ho lavorato in tutto gr. 11 di tirosina. Il procedimento era quello già descritto nelle due Note citate: in tubi di vetro aperti, lunghi circa 30 cm. e del diametro di 20-22 mm., si riscaldava la tirosina, 1 gr. per volta con 15 cc. di glicerina $d=1,26$. In circa 1 ora si raggiungeva la temperatura di 180°, e si manteneva fra i 180° e i 190° (solo eccezionalmente, per le variazioni della pressione del gas, si è giunti ai 200°) fino a completa soluzione della tirosina: per ciò occorrevano circa 2 ore.

Si otteneva così un liquido limpido, di colore giallo alle volte leggermente bruniccio, sempre con fluorescenza rossastra, che dopo raffreddamento si diluiva con 3-4 volumi di acqua, lasciandolo poi per 24 ore alla temperatura esterna invernale (circa 0°): si formava un precipitato bruno, fioccoso, assai leggero, che rimaneva sospeso nel liquido: raccolto su filtro, veniva lavato con acqua fredda fino a completa eliminazione della glicerina, poi si seccava in istufa a 100° sino a peso costante.

Ottenni così un totale di gr. 4,18 di sostanza solida secca, costituita da una polvere grigio-bruna, che esaurii, in apparecchio Soxhlet, con alcool assoluto bollente. L'estrazione fu ripetuta tre volte, ogni volta bollendo per alcune ore 100 cc. di alcool: alla terza estrazione, dopo 2 ore di ebollizione, 10 cc. del liquido evaporati a secco lasciarono appena tracce di residuo. Si sospese allora l'operazione, e il residuo indisciolto rimasto nel cartoccio venne raccolto e seccato a 100°. Ammontava a gr. 1,24, corrispondenti a circa il 30 % del prodotto totale solido di anidrifcazione: rendimento concordante con quello già riportato nelle Note accennate. La maggior parte (gr. 2,94) della sostanza precipitata dall'acqua nella soluzione glicerinica è quindi stata disciolta dall'alcool assoluto bollente, con colorazione bruna dovuta alle impurezze.

Anidride cristallizzata.

I liquidi delle due prime estrazioni vennero riuniti: dal primo, già a caldo, si era separata abbondantemente l'anidride cristallizzata: il terzo liquido d'estrazione non fu unito agli altri perchè conteneva appena tracce di sostanza disciolta, forse di anidride cornea (praticamente insolubile). Con tre cristallizzazioni dall'alcool si ottennero gr. 2.35 del prodotto puro, in aghetti bianchi finissimi, soffici, di splendore sericeo. Riscaldato in tubicino aperto aumentando rapidamente la temperatura, a 260° incomincia ad im-

(¹) Ber. d. d. chem. Gesell., 15, 1488.

brunire leggermente, e a 278°-279° (non corr.) fonde nettamente, senza sviluppo gassoso, in un liquido bruniccio. Riscaldato su lamina di platino, dapprima fonde in un liquido appena colorato, che poi va imbrunendo fino a completo annerimento e carbonizzazione, mentre si svolgono vapori che odorano leggermente di peli e di corna bruciati.

Si scioglie nell'alcool assoluto bollente, circa gr. 1,5 in 100 gr. di solvente: a freddo è quasi insolubile. Presso a poco nelle stesse proporzioni si discioglie nell'acqua bollente: per raffreddamento cristallizza benissimo anche da questo solvente. La sua soluzione acquosa, bollita con ossido di rame precipitato, non accenna affatto a colorirsi in azzurro: ciò che dimostra non esservi catene carbossiliche, e che quindi deve trattarsi di anidride ciclica.

Inoltre la sua soluzione acquosa si colora in rosso col reattivo del Millon, dimostrando la permanenza del gruppo ossifenilico libero.

All'analisi:

gr. 0,1554 di sostanza diedero gr. 0,3756 di CO_2 e gr. 0,0788 di H_2O .

In una determinazione di N col metodo di Kjeldahl, gr. 0,1394 di sostanza richiesero cc. 8,4 di $\text{HCl} \frac{\text{N}}{10}$.

	Trovato	Calcolato per $(\text{C}_9\text{H}_5\text{O}_2\text{N})_x$
C %	65,91	66,22
H %	5,63	5,56
N %	8,44	8,59

I dati analitici corrispondono perfettamente ad un'anidride ciclica della tirosina. Non fu possibile determinarne la grandezza della molecola, poichè la sua poca solubilità in alcool, in acqua, e meno ancora negli altri solventi neutri, non permetterebbe che troppo piccole variazioni del punto di congelamento o del punto di ebollizione, insufficienti a determinazioni esatte.

Una conferma che si tratta veramente di un'anidride della tirosina l'ho avuta facendone l'idrolisi. Gr. 0,3 di sostanza vennero bolliti a ricadere per 1 ora e mezza con cc. 20 di $\text{HCl} d=1,10$. La soluzione, limpida, si concentrò a piccolo volume, si aggiunse poi di ammoniacca diluita fino a neutralizzazione, e si portò a secco. Il residuo, raccolto e lavato con acqua fredda, si cristallizzò dal minimo di acqua bollente, aggiungendo, dopo la soluzione, un poco di alcool. Si ottennero degli aghetti bianchi, raggruppati nel modo caratterico della tirosina.

I. gr. 0,1399 di questa sostanza seccata diedero gr. 0,3084 di CO_2 e gr. 0,0776 di H_2O .

II. gr. 0,1814 diedero gr. 0,3952 di CO_2 e gr. 0,1014 di H_2O .

	Trovato		Calcolato per $\text{C}_9\text{H}_{11}\text{O}_2\text{N}$
	I.	II.	
C %	60,12	59,41	59,63
H %	6,16	6,21	6,12

Anidride cornea.

È costituita dalla parte rimasta indisciolta nell'estrazione con alcool assoluto bollente. Per la sua insolubilità, oltrechè nell'alcool, anche in tutti gli altri solventi neutri (ne furono provati numerosissimi), non fu possibile un'ulteriore purificazione del composto, nè si potè determinarne il peso molecolare. Si presenta sotto forma di una polvere di colore bianco sporco, amorfa: esaminata al microscopio, anche ai più forti ingrandimenti, non si riscontrò affatto struttura cristallina. Riscaldata rapidamente in tubicino aperto, incomincia ad imbrunire soltanto a 270°, e a 279° fonde con leggera decomposizione in un liquido bruno: presenta quindi lo stesso P. F. dell'altra anidride, e, data la decomposizione che accompagna la fusione stessa, non è da escludersi che intorno a quella temperatura vi sia un punto di trasformazione di un'anidride nell'altra.

Riscaldata su lamina di platino, fonde in un liquido bruniccio, che poi va carbonizzandosi con svolgimento di vapori che hanno l'odore caratteristico di sostanze cornee bruciate, assai più pronunciato di quello dell'altra anidride.

Sospesa nell'acqua (in cui forse è, sia pure in tracce, un poco solubile), reagisce col liquido del Millon, dando la caratteristica colorazione rossa, che dimostra la permanenza dell'aggruppamento ossifenilico anche in quest'anidride cornea.

All'analisi:

gr. 0,1274 di sostanza diedero gr. 0,3082 di CO₂ e gr. 0,0634 di H₂O;
" 0,151 di sostanza, sottoposta al metodo di Kjeldahl, richiesero cc. 9,2

di HCl $\frac{N}{10}$.

	Trovato	Calcolato per (C ₉ H ₆ O ₂ N) _x
C %	65,97	66,22
H %	5,53	5,56
N %	8,53	8,59

L'analisi ci dice dunque che anche questo composto è un'anidride della tirosina: anche in questo caso si è avuto una conferma dalla sua idrolisi, il cui prodotto è la tirosina.

Gr. 0,3 di anidride vennero bolliti a ricadere con cc. 20 di HCl $d=1,10$: in 2 ore si ottenne la soluzione completa. Il liquido, concentrato a piccolissimo volume, si neutralizzò con ammoniaca diluita, poi si portò a secco. Il residuo, ripreso con acqua fredda e lavato fino ad eliminazione del cloruro d'ammonio, si cristallizzò dall'acqua bollente, aggiungendo un poco d'alcool: si ottennero degli aghetti bianchi, dell'aspetto della tirosina.

Gr. 0,1203 del prodotto dell'idrolisi diedero gr. 0,2641 di CO_2 e gr. 0,0658 di H_2O .

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_9\text{H}_{11}\text{O}_3\text{N}$
C %	59,87	59,63
H %	6,07	6,12

Trasformazione reciproca delle due anidridi.

La supposizione fatta nel determinare il punto di fusione dell'anidride cornea, cioè di una probabile trasformazione di quest'anidride nell'altra cristallizzata, mi venne confermata dalla seguente esperienza.

Gr. 0,1 di anidride amorfa vennero bolliti a ricadere per 6 ore con 8 cc. di difenilmetano: la temperatura era di 257° - 258° , cioè una ventina di centigradi inferiore al punto di fusione. Il liquido andò a mano a mano inscurendo, fino a diventare giallo-bruno, e l'anidride si disciolse per la maggior parte: per raffreddamento si ebbe di nuovo separazione di sostanza solida, che riempiva quasi completamente il liquido. Tutto si versò sopra un filtro, lavando con benzolo bollente fino a completa eliminazione del difenilmetano: rimase aderente al fondo del palloncino una piccolissima quantità di sostanza nera, peciosa. La soluzione benzolica del difenilmetano aveva colore giallo-bruno con fluorescenza rossastra. La sostanza raccolta sul filtro era una polvere gialliccia, che seccata a 100° superava i gr. 0,09: bollita con alcool assoluto si disciolse quasi completamente con colore giallognolo, lasciando un piccolissimo residuo costituito di una polverina grigia amorfa, che all'aspetto appariva anidride cornea inalterata. La soluzione alcoolica, portata a secco, lasciava un residuo cristallino di gr. 0,09: ripreso con alcool bollente, decolorato con carbone animale, filtrato e concentrato, cristallizzò in aghetti prismatici bianchi, fondenti a 277° - 278° : osservati al microscopio apparivano identici a quelli dell'anidride cristallizzata. Dunque conducendo l'esperienza nel modo descritto, il 90% dell'anidride cornea insolubile si è trasformata in quella cristallizzata solubile.

D'altra parte l'anidride cristallizzabile può trasformarsi parzialmente in quella cornea. Quando infatti si fa la cristallizzazione dall'alcool, si osserva sempre nella concentrazione della soluzione, alle volte già durante il riscaldamento ed in ogni caso prima che incominci la cristallizzazione, la separazione di una piccola quantità di polvere bianca. Ne ho raccolto diverse porzioni sopra un filtro: esaminata al microscopio appare amorfa come l'anidride cornea: come questa non è più solubile in alcool: fonde però, sempre con decomposizione, un poco più alto, a 284° - 285° , forse perchè con questo procedimento è venuta a subire una purificazione, cui non si era potuto sottoporre quella che si ottiene direttamente dall'anidrifificazione con glicerina.

Le piccole quantità di sostanza che avevo a disposizione non mi hanno permesso di seguire coll'analisi queste trasformazioni di un'anidride nell'altra.

I fatti sperimentali sopra riportati stanno dunque a dimostrare che nel riscaldamento della tirosina con glicerina a 180°-190° si formano due anidridi, una cristallizzata ed una amorfa, analogamente a quanto già era stato osservato per la glicocolla; e mostrano inoltre la possibile trasformazione dell'una anidride nell'altra.

La loro formazione si è avuta non già facendo il riscaldamento in tubi chiusi, cioè nelle condizioni in cui Balbiano e Trasciatti, operando con la glicocolla, avevano ottenuto principalmente anidride cornea: ma bensì in tubi aperti, cioè in quelle condizioni che il Maillard ritiene le più favorevoli alla disidratazione degli acidi α -amidati⁽¹⁾ e che nel caso della glicocolla portavano alla formazione fino dell'86 % del teorico di anidride cristallizzata bimolecolare e di tracce appena dell'anidride cornea più complessa⁽²⁾: fatto, questo, che sembrò al Maillard potesse autorizzarlo a diminuire di molto l'importanza dei fatti precedentemente resi noti dal Balbiano. A pag. 20 del suo volume ricorda come la glicerina produca delle condensazioni *regolari* nella serie degli aminoacidi: e il fatto che per la glicocolla, per la sarcosina, per la leucina, per l'alanina ottiene come prodotti principali le corrispondenti anidridi cicliche bimolecolari, ha condotto il Maillard alla conclusione che, quando si compia la reazione in modo da permettere all'acqua formatasi di andarsene liberamente nel corso del riscaldamento, si debba formare quasi esclusivamente l'anidride bimolecolare, mentre quella cornea sarebbe un prodotto tutt'affatto secondario e di pochissima importanza. Tuttavia quest'anidride più complessa potrebbe formarsi in quantità maggiore diminuendo di molto la proporzione della glicerina (loc. cit., pp. 186-192): e così spiegherebbe come Balbiano e Trasciatti ottenevano quasi esclusivamente anidride cornea: questi Autori infatti riscaldavano in tubi chiusi 20 gr. di glicocolla con 10 gr. di glicerina. Pure ammettendo che l'interpretazione che il Maillard dà dell'influenza della quantità della glicerina in queste disidratazioni sia, per il caso della glicocolla, corrispondente al vero, essa non è tuttavia generalizzabile, poichè per il caso della tirosina vediamo che con una diluizione grandissima (gr. 1 di tirosina in circa 20 di glicerina) e pure operando in tubi aperti, si ottiene con rendimento notevole l'anidride cornea accanto a quella cristallizzata. Si avrebbe dunque, per la tirosina, un comportamento in qualche modo diverso da quello della glicocolla: fatto che per lo meno contrasta col senso di regola generale che dovrebbe sovrastare alle disidratazioni di tutti questi acidi α -amidati, come traspare da tutta l'opera del chimico francese.

(¹) L. C. Maillard, *Genèse des matières protéiques et des matières humiques: action de la glycérine et des sucres sur les acides α -aminés*. Paris, Masson et C. éditeurs (1913), pag. 59.

(²) loc. cit., pag. 64.

La trasformazione reciproca delle due anidridi della tirosina potrebbe far pensare a delle condizioni di stabilità dipendenti dalla temperatura: riscaldando con difenilmetano a 257°-258°, l'anidride cornea si trasforma si può dire totalmente nell'anidride cristallizzata: questa, riscaldata con alcool, si trasforma, sia pure in piccola parte, in quella amorfa. Ciò potrebbe forse spiegare come alla temperatura relativamente elevata a cui si opera (170°-190°) si ottenga quasi esclusivamente il composto cristallizzato: chissà se potendo operare a temperature più basse, non si otterrebbero maggiori quantità dell'anidride cornea? I tessuti naturali che all'idrolisi danno di questi acidi α -amidati, non possono forse considerarsi dei prodotti di anidridificazione che si formerebbero alla temperatura ordinaria? e non sono essi amorfi come le anidridi cornee, e non cristallizzati come le anidridi bimolecolari? (¹).

Questa correlazione tra l'anidride cornea e i tessuti naturali fu messa in piena evidenza dal Balbiano nel suo lavoro, quantunque il Maillard cerchi di diminuirne l'importanza (²). Anche il Fischer (³) non ritenne, dal punto di vista chimico, degna di particolare attenzione l'anidride cornea della glicocolle, perchè essa, a differenza dei polipeptidi cristallizzati, è un composto amorfo, e quindi non ben purificabile. Ora l'aver ottenuto anche dalla tirosina (acido amidato che si trova presente in notevole quantità nei prodotti d'idrolisi di molti tessuti organizzati, quali la seta, lo scudo della tartaruga, i peli, le penne, ecc.) un composto bene caratterizzato quale una sua anidride amorfa, che per le sue proprietà si accosta ai tessuti naturali, fa acquistare un alto valore biologico a queste anidridi cornee, che per la stessa coincidenza delle loro proprietà fisiche, possono in certo modo essere considerate come la base sulla quale questi tessuti stessi si formerebbero: perchè gli acidi amidati glicocolle e tirosina, prodotti principali dell'idrolisi di alcuni tessuti organizzati, potrebbero provenire da queste anidridi cornee che si troverebbero allo stato libero mescolate con altri polipeptidi nei tessuti stessi.

(¹) Ricordo ancora, chè non mi sembra a questo proposito privo d'interesse, come il Löw avrebbe ottenuto l'anidride amorfa conservando del latte *per 8 anni a temperatura ordinaria*.

(²) V. opera citata, particolarmente a pp. 194-195.

(³) Ber. 39 (1906), 552, e Mon. scient., 1906, 484.

Chimica-fisiologica. — *Ricerche sulla composizione chimica della mucosa intestinale* ⁽¹⁾. Nota I, di G. QUAGLIARIELLO e A. CRAI-FALEANU, presentata dal Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI.

Sulla composizione chimica della mucosa intestinale l'unico studio finora eseguito è quello del Bottazzi ⁽²⁾, i cui risultati trovansi citati dal Hammarsten ⁽³⁾. Il Bottazzi, però, non fece che iniziare la ricerca analitica delle sostanze estratte dalla mucosa e dall'epitelio intestinale, di cui egli additò un metodo ottimo per ottenere grande quantità.

Ora noi abbiamo creduto opportuno di riprendere tali ricerche al punto in cui furono dal Bottazzi lasciate, al fine di estenderle e possibilmente di approfondirle.

Per ottenere una quantità considerevole di epitelio intestinale, il Bottazzi riempiva l'intestino, precedentemente lavato, di soluzione 1-5 % di NaF.

Noi ci siamo serviti, oltre che di questo sale, anche di acqua distillata e di soluzione di carbonato sodico, usando le quali, però, è necessario di saturarle di toluolo per ostacolare lo sviluppo dei microrganismi della putrefazione.

Abbiamo fatto le nostre ricerche sull'intestino di maiale. Preso al macello da animali appena uccisi, era subito portato al laboratorio, dove era lavato internamente con acqua di fonte tiepida, e poi diviso in pezzi eguali della lunghezza di circa 1 metro ciascuno.

I vari pezzi, riempiti del liquido estrattore e legati alle due estremità, venivano poi sospesi verticalmente sopra altrettante capsule di porcellana, nelle quali si raccoglieva il liquido che da essi filtrava durante le 12 o 24 ore che erano lasciati nella detta posizione.

1° *Esperimento* (26 marzo 1915). — Intestino di maiale, dal piloro al cieco, della lunghezza di circa 14 metri. Lo si lava per tre volte con acqua di fonte tiepida, lo si divide poi in pezzi, e si riempiono questi con acqua distillata (circa 9 litri) satura di toluolo.

Dalle anse filtrano e sono raccolti circa 2000 cm.³ di un liquido opalescente roseo. Trascorse 24 ore, i pezzi d'intestino sono vuotati del loro contenuto. Si lascia il liquido

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Fil. Bottazzi, *Proprietà chimiche e fisiologiche delle cellule epiteliali del tubo gastroenterico*. Arch. di fisiol. I, pag. 413 (1904).

(3) O. Hammarsten, *Lehrb. d. physiol. Chemie*, VII^o Aufl., pag. 464 Wiesbaden 1910. Nell'ultima edizione di quest'opera, del 1914, curata dal Hedin, la citazione delle ricerche del Bottazzi è stata omessa, non si sa perchè, nè è stata sostituita da altre notizie sull'argomento.

a riposo per 24 ore, sotto uno strato di toluolo, e poi lo si decanta. Nel sedimento, esaminato al microscopio, si riconoscono molti aggruppamenti di cellule epiteliali, che qua e là pare riproducano la forma dei villi, e molte cellule isolate rigonfiate, non che un materiale granuloso amorfo, che sembra detrito cellulare.

Si decanta il liquido soprastante, e lo si filtra. Il filtrato è leggermente opalescente e roseo. Presenta le seguenti reazioni:

1°) Non coagula al calore, se non dopo aggiunta di sali neutri;

2°) l'acido acetico vi produce, a freddo, un precipitato, che in un eccesso di acido si ridiscioglie, ma solo in assenza di NaCl; il precipitato, ridisciolto da un eccesso di acido in assenza di NaCl, si riforma in seguito ad aggiunta di questo sale, che peraltro, da solo, non provoca precipitazione;

3°) il CaCl_2 diluito produce precipitazione, come pure il MgSO_4 e il $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ in soluzione satura;

4°) l' HCl , l' HNO_3 e l' H_2SO_4 provocano precipitazione, ma solo il precipitato prodotto dall' HCl è solubile in un eccesso dello stesso acido.

Una parte del liquido è trattata con acido acetico, in modo da produrre la precipitazione completa delle sostanze precipitabili con questo acido. Il filtrato (neutralizzato) dà le seguenti reazioni:

1°) Coagula al calore. Il filtrato limpido, che non coagula più al calore, dà la reazione del biurete e un precipitato per aggiunta di tannino;

2°) vi si forma un precipitato per semisaturazione con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. Il filtrato coagula ancora al calore.

Il liquido contiene:

Residuo secco a 110°C gr. 5,820 ‰;

Azoto totale gr. 0,840 ‰ (determinato col metodo di Kjeldahl);

Azoto del liquido liberato dalle proteine precipitabili con acido acetico gr. 0,364 ‰;

Azoto di sostanze non precipitabili mediante trattamento del liquido secondo il metodo di Schenk gr. 0,235 ‰.

II° *Esperimento* (17 aprile 1915). — Intestino di maiale, della lunghezza di circa 16 metri. Lo si lava per due volte con acqua di fonte tiepida, e lo si riempie con acqua distillata satura di toluolo (10 litri). Lo si lascia sospeso per 20 ore, durante il qual tempo filtra un liquido limpidissimo roseo (circa 3000 cm.³).

Si estrae il liquido dall'intestino, e lo si lascia in riposo per 24 ore; quindi si decanta, si filtra e si unisce questo filtrato al liquido trasudato dalle anse intestinali. Il materiale depositatosi al fondo del recipiente somiglia a quello dell'esperimento precedente.

Esame del liquido:

Residuo secco gr. 6,03 ‰,

Azoto totale gr. 0,875 ‰;

Azoto residuale gr. 0,166 ‰;

Azoto contenuto nel liquido liberato dalle proteine precipitabili con acido acetico, gr. 0,420 ‰.

Le reazioni qualitative sono in tutto simili a quelle del 1° esperimento.

III° *Esperimento* (28 aprile 1915). — Intestino di maiale lungo circa 18 metri. Lo si lava due volte con acqua del Serino tiepida, e lo si divide in segmenti che vengono riempiti di soluzione all'1 % di fluoruro sodico saturata con toluolo. Si adoperano in tutto 16 litri di soluzione. Si lasciano le anse sospese per 20 ore. Filtrano circa 4 litri di liquido roseo e limpido. Si vuotano le anse intestinali. Il contenuto è lasciato a riposo per 24 ore. Si decanta e si filtra, e il filtrato è unito al liquido trasudato dall'intestino. Il materiale depositato, esaminato al microscopio, è costituito di cellule epiteliali, in generale ben conservate.

Esame del liquido:

Il liquido è leggermente giallastro, opalescente, e presenta reazione debolmente alcalina. Dà le seguenti reazioni:

- 1°) coagula al calore;
- 2°) l'acido acetico diluito vi produce abbondante precipitato, che non si ridiscioglie in un eccesso di acido;
- 3°) l'ammoniaca chiarifica completamente il liquido, per sè stesso un po' opalescente;
- 4°) il cloruro di calcio vi produce un precipitato fioccoso;
- 5°) il liquido, trattato con un eccesso di acido acetico e filtrato, dà ancora precipitato quando è semi-saturato con solfato di ammonio o è saturato con solfato di magnesio;
- 6°) il filtrato, ottenuto dopo questa ultima precipitazione, coagula al calore;
- 7°) il liquido, completamente dealbuminizzato mediante il calore, dà ancora la reazione del biurete e quella del Millon.

Determinazioni quantitative:

Residuo secco 13,45 ‰, da cui, detratti i 10 gr. di fluoruro sodico, restano gr. 3,45 ‰ di sostanze estratte;

Azoto totale gr. 0,378 ‰;

Azoto contenuto nel liquido liberato dalla proteine precipitabili con acido acetico gr. 0,262 ‰;

Azoto residuale gr. 0,129 ‰.

IV° *Esperimento* (5 maggio 1915). — Intestino tenue di maiale, della lunghezza di circa 12 metri. Lo si lava per due volte con acqua di fonte tiepida, e poi lo si divide in pezzi che vengono riempiti di soluzione 0,5 % di carbonato sodico (circa 12 litri).

Si lasciano le anse sospese per 16 ore. Durante questo tempo, filtrano attraverso la parete intestinale circa tre litri di liquido roseo e limpido. Vuotato l'intestino, si lascia in riposo il liquido per 24 ore; poi si decanta e si filtra. Il filtrato si unisce al liquido trasudato. Il materiale depositato, esaminato al microscopio, si mostra costituito di poche cellule epiteliali integre, sebbene rigonfiate, e, pel resto, di una materia granulosa amorfa, che ricorda quella già osservata nel primo esperimento.

Esame del liquido:

- 1°) non coagula al calore; coagula però se è neutralizzato;
- 2°) l'acido acetico diluito vi produce un notevole precipitato, solubile in un eccesso di acido;
- 3°) il liquido, trattato con una quantità sufficiente di acido acetico, dà abbondante precipitato; il filtrato dà un altro precipitato, quando è semisaturato con solfato di ammonio;
- 4°) dopo precipitazione con solfato di ammonio, il filtrato contiene ancora sostanze coagulabili al calore;
- 5°) il liquido dealbuminizzato dà ancora le reazioni dei peptoni.

Determinazioni quantitative:

Residuo secco gr. 13,25 ‰, da cui, detratti 5 gr. spettanti al carbonato sodico, restano gr. 8,25 ‰.

Azoto totale gr. 1,19 ‰;

Azoto del liquido liberato dalle proteine precipitabili dall'acido acetico gr. 0,434 ‰;

Azoto residuale gr. 0,366 ‰.

Dagli esperimenti descritti risulta che il liquido di estrazione dell'intestino, comunque l'estrazione sia stata fatta, cioè con acqua distillata ovvero

con soluzione di fluoruro o di carbonato sodico, contiene sempre, oltre ai sali, varie sostanze proteiche.

Di queste possiamo distinguere almeno tre o quattro specie:

1°) una o più sostanze proteiche precipitabili dagli acidi diluiti;

2°) nel liquido liberato da queste, è sempre possibile di produrre un precipitato, benchè scarso, di altre proteine, mediante semi saturazione con solfato di ammonio. Queste proteine dovrebbero quindi essere considerate come appartenenti al tipo delle globuline;

3°) nel liquido liberato anche da questa seconda specie di sostanze trovansi ancora una o più proteine coagulabili dal calore, che corrispondono perciò a sostanze del tipo dell'albumina.

Tralasciando la distinzione fra le sostanze del secondo e del terzo tipo, distinzione che non ha fondamentale importanza, il rapporto fra le proteine precipitabili con acidi e le altre risulta quello che è indicato nella tabella riassuntiva (colonna 10^a).

TABELLA.

Composizione chimica dell'estratto acquoso d'intestino di maiale.

Num. dell'esperimento	Data	Liquido di estrazione	Residuo secco gr. o/100	Ceneri gr. o/100	Azoto totale (N ₁) gr. o/100	Azoto residuale (N ₂) gr. o/100	Azoto proteico comples- sivo (N ₃) gr. o/100	Azoto delle proteine precipitabili con acido acetico (N ₄) gr. o/100	Rapporto fra l'azoto delle proteine precipitabili con acido acetico e l'N delle altre proteine $\left(\frac{N_4}{N_3-N_4}\right)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1915 26.3	acqua distillata	5,82	0,61	0,840	0,235	0,605	0,476	3,7
2	17.4	" "	6,03	—	0,875	0,166	0,709	0,455	1,9
3	28.4	Na Fl 1%	3,45	—	0,378	0,129	0,249	0,116	0,87
4	5.5	Na ₂ CO ₃ 0,5%	8,25	—	1,190	0,366	0,824	0,756	11,1

I dati raccolti nella detta colonna dimostrano che il rapporto non è costante, ma che in ogni caso la proteina precipitabile con acidi è notevolmente maggiore di tutte le altre proteine contenute nel liquido di estrazione. È inoltre importante di notare come tale rapporto presenti il suo valore più elevato nel caso in cui l'estrazione fu fatta con soluzione di carbonato sodico.

Ma già, in generale, la quantità totale di sostanze proteiche estratte dall'intestino varia col variare del liquido di estrazione (vedi colonna 8^a).

La detta quantità è massima nella esperienza fatta con soluzione di carbonato sodico, minima in quella fatta con soluzione di fluoruro sodico, media nelle due esperienze con acqua distillata.

Ora questo risultato si spiega benissimo, quando si pensi che, poichè la maggior parte delle proteine dell'intestino sono solubili in alcali diluiti, il liquido estrattore più efficace debba essere una soluzione debolmente alcalina, quale è appunto quella di carbonato sodico. D'altra parte, fra l'acqua distillata e la soluzione di fluoruro sodico, che, quando è molto diluita, può essere considerata come praticamente neutra o appena un poco alcalina, si comprende come debba essere più efficace l'acqua distillata, che rigonfia e disintegra le cellule epiteliali, che non la soluzione diluita di fluoruro sodico, la quale distacca bensì le cellule epiteliali ma non le disfà, come dimostra l'esame microscopico del sedimento.

Bisogna inoltre notare che nei liquidi di estrazione, oltre alle sostanze proteiche, sono contenute molte altre sostanze organiche, come prova la cifra relativamente alta dell'azoto residuale (vedi colonna 7^a della tabella), derivante verosimilmente da prodotti di scissione di proteine alimentari (proteosi, peptone, amino-acidi). Questi prodotti, in parte si trovano già preformati nell'intestino al momento in cui l'animale è ucciso; in parte, data la presenza di fermenti, si formano dopo.

Infatti, due determinazioni eseguite nel liquido di estrazione, la prima subito dopo il vuotamento dell'intestino, la seconda dopo alcune ore, mostrarono che l'azoto residuale va man mano aumentando, mentre diminuisce l'azoto proteico.

Siccome da quanto innanzi si è detto risulta che la sostanza proteica in maggior quantità contenuta nell'estratto acquoso dell'intestino è quella precipitabile con acido acetico, interessa conoscere la natura della medesima. Per i suoi caratteri di solubilità, corrisponderebbe a una mucina, o a una nucleo-proteina, o a un miscuglio di ambedue le sostanze. È noto come sia difficile il distinguere una mucina o un mucoide da una nucleo-proteina; tuttavia, avendo applicato tutti i procedimenti consigliati dagli autori a questo riguardo, ci siamo persuasi in modo assoluto che si tratta di una sostanza unica. Il fatto poi di aver potuto ottenere per tale sostanza (dopo averla purificata mediante successive precipitazioni con acido e dissoluzione in alcali e mediante lavatura con alcool ed etere) la prova della presenza, in essa, di fosforo e di basi puriniche, dimostra, in modo non dubbio, che si tratta di una nucleo-proteina.

L'assenza di mucina dall'estratto acquoso dell'intestino ci ha molto sorpresi; ma i fatti osservati sono quelli sopra detti; e, del resto, anche i caratteri fisici dello estratto acquoso, per nulla filante, confermano le osservazioni chimiche,

Può darsi che la prima lavatura dell'intestino porti via la mucina dalla superficie della mucosa, dato che vi sia; o che quella sostanza, che ordinariamente dicesi mucina (prodotto delle cellule mucose caliciformi), non sia vera mucina, ma piuttosto una nucleo-proteina avente caratteri di somiglianza con la mucina vera, pur differendone chimicamente.

In una Nota successiva pubblicheremo i risultati dell'analisi chimica della nucleo-proteina estratta dall'intestino, alla quale crediamo che debba essere conservato il nome, che le dette il Bottazzi, di *enteronucleoproteina* (enteroproteide).

Patologia vegetale. — *Sulla morfologia e sulle condizioni di sviluppo della Sclerotinia trifoliorum*. Nota del professore VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio G. CUBONI.

Esistono numerose osservazioni intorno a questo fungo che cagiona danni abbastanza gravi nei trifogliai, soprattutto nell'Europa settentrionale; esse sono state criticamente esposte dal Coleman⁽¹⁾ le cui ricerche integrano sperimentalmente i precedenti studi di De Bary, Rehm, Eriksson, Rostrup e Brefeld. Restavano tuttavia insolute alcune questioni riflettenti lo stato conidiale o microconidiale del fungo e le condizioni che determinano la comparsa epidemica dell'infezione nei campi di trifoglio, onde essendomisi offerta l'occasione, ho creduto opportuno riprendere lo studio della *Sclerotinia trifoliorum* per delucidare codeste incognite.

Il parassita ha distrutto nella scorsa stagione un piccolo appezzamento di trifoglio ladino coltivato nell'orto della Scuola agraria: dai numerosi sclerozi rimasti a fior di terra in seguito al disfacimento del colletto e delle catene di ladino, cominciarono a spuntare verso la fine dell'ottobre innumerevoli apotecii, la cui comparsa continuò durante la prima quindicina di novembre ancorchè vi fosse un notevole abbassamento di temperatura.

Ponendo alcuni apotecii maturi in scatola di Petri, si osserva dopo poche ore la caratteristica disseminazione delle spore, le quali vengono proiettate a mucchietti contro le pareti della scatola, ogni mucchietto risultando formato dalle 8 spore contenute in ogni asco. Le dimensioni di questi oscillano intorno a $175\ \mu$ e le ascospore mature misurano $16-18 \times 8\ \mu$.

Appena disseminate le ascospore sono atte a germinare, tanto nell'acqua distillata che nei comuni substrati nutritivi. Ho ottenuto colture pure col solito metodo di selezione in gelatina nutritizia: il fungo si sviluppa abbastanza bene in mosto gelatinizzato, meglio in gelatina di brodo di fagiuolo

⁽¹⁾ Coleman, *Ueber Scler. Trifoliorum*, Arbeiten d. K. K. Biol. Anstalt, Berlin 1907, V, pag. 469.

Mazè. L'andamento delle colture tenute a temperatura relativamente bassa 8°-10° od in termostato a 20°-25° rivela che si tratta di organismo psicrofilo, essendo più rigoglioso e sollecito lo sviluppo a temperatura relativamente bassa. In queste condizioni il micelio invade rapidamente l'intera massa del substrato, dando origine in breve tempo a numerosi e voluminosi sclerozi.

I frammenti di micelio servono egregiamente pel trapianto del fungo allo stato di purezza: ne ho riprodotto numerose colture in fiale Erlenmeyer contenenti semi di frumento, riso, frammenti di trifoglio, sommersi in acqua, sterilizzando il tutto all'autoclave: mantenuti alla temperatura dell'ambiente (10°-15°) in pochi giorni la superficie libera del substrato si ricopre di una spessa cotica fungina formata da elementi anisodiametrici: filamenti minuti che tendono a raggomitolarsi e formare sclerozi, filamenti di diametro 2-3 volte maggiore che danno origine all'apparato conidiale.

Intorno a questo si avevano poche e frammentarie osservazioni: prescindiamo da quelle fatte seguendo il limitato sviluppo che assume il fungo coltivato in goccia pendente. Il De Bary accenna alla formazione di « piccoli rami aggruppati dai quali prendono origine gli stessi spermazi rotondi non germinabili che si ottengono dalla germinazione (delle ascospore?) in acqua e che si riscontrano nel micelio di parecchie specie affini di *Sclerotinia* ».

Il Coleman, che ha coltivato il fungo in grande, si limita ad accennare alla struttura molto complicata che presentano i conidiofori, i quali formano talora una spessa cotica di aspetto farinoso; per quanto concerne il significato biologico, pur non escludendo che essi possano essere agenti di infezione, conviene di non averne mai osservata la germinazione.

L'apparato conidioforo che ho ottenuto coltivando la *Scler. trifoliorum* sui diversi substrati dianzi cennati, presenta costantemente la caratteristica struttura assegnata dal Vuillemin⁽¹⁾ alle *Verticilliacae* e più precisamente alle *Spicariae*: dai filamenti miceliali si distaccano lateralmente brevi articoli che si ramificano dando origine ad un ciuffo di *filidi* dal cui apice si differenziano catenelle lunghissime di conidi. Lasciando invecchiare le colture, esse perdono l'aspetto farinoso, in seguito a gelificazione dell'apparato conidioforo onde i conidi liberi o catenulati formano una glia alla superficie libera del substrato. Sotto questo punto di vista non potrebbesi seguire il Lind⁽²⁾ nell'attribuire a tutte le specie incluse nel sotto genere *Eusclerotinia* apparati conidiali del tipo *Sphacelia*, in opposizione al tipo *Monilia*, caratteristico del sottogenere *Stromatinia*.

Nei substrati ricchi di alimento azotato, come la gelatina di brodo di fagiuolo, partendo da ascospore o da frammenti di micelio, il rigoglioso svi-

⁽¹⁾ Vuillemin, Bull. Soc. Nancy, 1910.

⁽²⁾ Lind I., Ref. in Centr. f. Bakt., Band 40, pag. 197.

luppo miceliale porta alla rapida differenziazione di numerosi e voluminosi sclerozi; manca qualsiasi traccia di formazioni conidiali. Queste invece si ottengono abbondantemente nelle colture in semi di cereali immersi in acqua distillata e sterilizzati all'autoclave. Il micelio si organizza rapidamente in voluminosi sclerozi, ma se ne può provocare la ripresa vegetativa ricoprendolo con un velo d'acqua sterilizzata: si ha allora scarsa formazione di nuovi sclerozi ed abbondante produzione di conidi.

Ma le più abbondanti fruttificazioni conidiali si ottengono durante la vita parassitaria del fungo soprattutto quando esso si sviluppa sotto una forma che presenta grande analogia colla cosiddetta *maladie de la toile* osservata dagli studiosi della affine *Botrytis cinerea*.

Spargendo frammenti di micelio, provenienti da colture pure in gelatina, alla superficie del terreno in vaso ove siano seminate comuni leguminose foraggere (trifoglio, medica, fieno greco), man mano che le piantine spuntano esse vengono rapidamente distrutte. La *Sclerotinia trifoliorum* forma una rete od una ragnatela pochissimo appariscente che si diffonde alla superficie del terreno, avvolge la base del fusticino e ne provoca la disorganizzazione: le piantine si allettano e su di esse si differenziano dopo alcuni giorni i caratteristici conidiofori riferibili al genere *Spicaria*. Le piantine sono esposte all'infezione durante l'intera fase germinale; formate le prime foglie sembra che cessi la recettività.

Oltrechè le leguminose foraggere questo fungo può colpire anche la fava: ho constatato a più riprese l'avvizzimento e la rapida disorganizzazione della regione basilare dello stelo di piantine di fava crescenti su terreno inquinato col micelio di *Scler. trifoliorum*. I caratteri che esse presentano coincidono con quelli di una ben nota avversità della leguminosa in questione che di tanto in tanto danneggia le coltivazioni nell'Italia centrale e meridionale: il cosiddetto mal dello sclerozio, attribuito a *Sclerotinia libertiana*; dai risultati delle infezioni sperimentali, mi sembra di poter concludere che probabilmente anche a *Scler. trifoliorum* debba attribuirsi il danno che si lamenta nelle coltivazioni da seme in talune annate.

Sono indotto a tale supposizione dalla correlazione tra lo sviluppo epidemico della *Scler. trifoliorum* negli erbai di trifoglio e l'andamento della stagione: la comparsa saltuaria irregolarmente periodica dell'infezione, le variazioni d'intensità e di diffusione da un anno all'altro sono subordinate alle vicende della stagione autunnale. Richiamo queste osservazioni, frutto di un periodo quindicennale di indagini compiute nella regione Emiliana e Toscana, perchè esse sono state confermate nel 1913 dall'Hiltner⁽¹⁾ e specialmente dallo Störmer⁽²⁾, per quanto riguarda la comparsa della malattia nei trifogliai in Germania: nelle annate in cui l'autunno è mite e piovoso, la

(1) Hiltner, Prakt. Bl. f. Pflschutz, 1913, 54.

(2) Störmer H., Das Auftreten des Kleeskrebs. D. Land. Presse 1913, n. 40.

vegetazione del trifoglio procede rigogliosa anche col sopravvenire dell'inverno; i primi geli sorprendono le piante in piena vegetazione e ne mortificano o ne ledono i tessuti. La *Sclerotinia trifoliorum*, che differenzia apoteci ed ascospore anche nel tardo autunno, ed è dotata di spiccata attitudine psicrofila, trova condizioni favorevoli di penetrazione e di sviluppo nei tessuti più o meno compromessi dalle brinate; onde i danni che si constatano nella primavera successiva sono tanto più gravi per quanto più promettenti si presentavano nell'autunno avanzato gli erbai, per freschezza e fertilità di terreno o per fortunata ubicazione.

Nelle annate a decorso regolare nelle quali gli erbai passano allo stato di riposo prima che sopravvengano i geli, il cancro del trifoglio non si manifesta. Tanto più opportuno mi sembra di insistere su questo speciale lato dello studio della malattia in quanto esso può integrare le nozioni che si hanno intorno al diverso comportamento delle foraggere perennanti in genere e dell'erba medica in specie di fronte ai rigori vernini.

Si ritiene in generale che le invernate rigide riescano assai pregiudizievoli alla medica come attestano i frequenti casi di medicai diradati o distrutti dal gelo. Ma anche a tale riguardo si hanno singolari differenze da un anno all'altro, contraddittorie se l'unica determinante del fenomeno fosse l'abbassamento di temperatura. In realtà sono funeste pei medicai giovani o vecchi le invernate rigide che seguono a vegetazione prolungata durante l'autunno per freschezza del suolo onde le piante tardano a ridursi allo stato di perfetto riposo.

La facilità di moltiplicazione della *Scler. trifoliorum* per mezzo di frammenti di micelio contrasta col comportamento degli sporidi che ne prendono origine. Ho tentato in tutti i modi di provocarne la germinazione, ma non sono stato più fortunato dei precedenti studiosi di tale questione, per cui concludo col Coleman che il significato biologico di questi organi rimane tuttora misterioso.

Zoologia. — *Sui trattamenti insetticidi contro le tignuole della vite. II: Trattamenti con l'acqua calda.* Nota del dott. MARIO TOPI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Il Semichon, che ha proposto questi trattamenti, ne ha proclamato l'efficacia contro le uova (¹) e le larve delle tignuole della vite (*Conchylis*,

(¹) Il Semichon scrive nella sua Memoria: « L'eau chaude a 65 degrés détruit tous les oeufs de Cochylis et d'Eudemis qu'elle touche »; ed in una Memoria successiva ripete: « Les aspersions d'eau chaude entre 55 et 65 degrés m'ont permis de détruire les oeufs de l'altise, de la chelonja caja, de la pyrale, de la cochylis, de l'eudemis ». Dice anche, nella stessa Memoria: « Les aspersions d'eau chaude peuvent s'appliquer parfaitement à la destruction des Cochylis et des Eudemis de deuxième ou troisième génération, contre lesquelles nous sommes, jusqu'ici, très faiblement armés ».

Eudemis e *Pirale*), contro gli afidi, contro le crittogame a micelio esterno (oidio) e contro le fruttificazioni esterne delle crittogame. Le nostre esperienze si limitano alle due tignuole più frequenti e dannose (*Conchyliis* ed *Eudemis*) e ne riguardano soltanto, per le ragioni dette nella prima Nota, la generazione estiva. Inoltre le abbiamo limitate principalmente alle uova per questa considerazione: che, anche ammettendo che l'acqua, alla temperatura indicata dal Semichon, fosse capace di uccidere le larve, riteniamo che non potrebbe raggiungerle quando siano internate fra i bocci fiorali o quando siano penetrate entro l'acino ⁽¹⁾: ciò che avviene a brevissima distanza di tempo dalla schiusura dell'uovo. Il mezzo preconizzato ci sembrava invece di grande utilità se avesse potuto sterilizzare le uova senza danneggiare la pianta; ed inoltre l'efficacia del trattamento si prolungherebbe, con grande vantaggio, per tutta la durata di incubazione delle uova.

Abbiamo fatto esperienze in campagna ed in laboratorio. In campagna, nella stessa vigna in cui facemmo le prove con l'estratto di tabacco, trattammo il 21 luglio una prima volta due filari di viti, l'uno di *barbera* e l'altro di *lambrusca*. Seguendo gli insegnamenti forniti dallo stesso Semichon, facemmo bollire 8 litri d'acqua e vi aggiungemmo 4 litri d'acqua a circa 16-18°, empiendo una delle ordinarie pompe da solfato di rame.

Facemmo un secondo trattamento il 28 luglio. La temperatura dell'acqua entro la pompa era di 65-68°. Applicando un termometro, col bulbo involto in uno straccio, contro un grappolo, ed irrorandolo abbondantemente, al principio dell'operazione il termometro indicava una temperatura di 56°; vuotandosi la pompa, la temperatura del getto scendeva a 53-52°. Trattandosi il secondo filare, con la pompa già riscaldata dai precedenti trattamenti, la temperatura del getto non variava sensibilmente, mantenendosi intorno a 56°.

In questi trattamenti si bagnarono accuratamente e copiosamente tutti i grappoli.

Contemporaneamente raccogliemmo degli acini che presentassero uova di tignuole: su ognuno di questi vi era in generale una, talvolta due o tre uova. Dieci di questi acini li tenemmo in capsula di Petri come controllo; 5 li immergemmo, estraendoli immediatamente, in un recipiente contenente acqua a 70°, portata a questa temperatura scaldandola a bagno-maria; 5 li immergemmo allo stesso modo nell'acqua a 60°, e 5 nell'acqua a 55°.

4 li tenemmo immersi nell'acqua a 65° per 10", e 3 nell'acqua a 55° pure per 10".

Ripetemmo successivamente queste prove con altri 17 acini (9 nell'acqua a 65° e 8 nell'acqua a 55°, immersione istantanea), usando acqua meno calcarea di quella usata la prima volta.

(1) « Là (entro l'acino) sont presque invulnérables », dice lo stesso Semichon,

Per riprodurre in laboratorio ciò che dovrebbe avvenire nel trattamento effettuato in aperta campagna, proiettammo anche con un contagocce un getto di acqua a 55° direttamente sulle uova che si trovavano su 5 altri acini.

Ecco i risultati dell'esame che compiemmo circa quindici giorni dopo:

Acini di controllo:

I) L'acino è divenuto nero; presenta due erosioni e racchiude due larve, lunghe meno di 2 mm.

II) Annerito, con muffa; erosione con sterco e filamenti sericei, legato col precedente; nessuna larva.

III) Annerito in parte; grosso mucchio esterno di sterco; all'interno una larva di *Conchylis* lunga 4-5 mm. (questa evidentemente era già penetrata entro l'acino all'epoca della raccolta) ed un'altra larva lunga 2 mm.

IV) Annerito, con muffa; sterco alla superficie e fili sericei; all'interno 2 larve, l'una lunga 3 mm., l'altra 1 $\frac{1}{2}$ mm.

V) Annerito, piccolo; nessuna erosione; nessuna larva.

VI) Annerito parzialmente; due erosioni con sterco: da una fuoriesce per metà una larva lunga 2 mm.

VII) Verde: due erosioni esterne con sterco; 2 larve (lunghe, rispettivamente, mm. 2 e 1 $\frac{1}{2}$).

VIII) Verde, in piccola parte annerito; un'erosione con sterco; all'esterno 1 larva di 2 mm.; all'interno più vasta erosione con altra larva di 2 mm.

IX) Verde; nessuna erosione esterna; nessuna larva.

X) Verde; lieve erosione con filamenti, senza sterco; all'interno 1 larva di mm. 2 $\frac{1}{2}$.

In totale, nei 10 acini di controllo si rinvennero: 11 larve di mm. 1 $\frac{1}{2}$ -3 di lunghezza ed una di mm. 4.

Acini immersi nell'acqua a 55°:

I) Ammuffito; nessuna larva.

II) Nero; erosione e sterco esternamente; nessuna larva.

III) Nero; nessuna erosione; una larva di 2 mm.

IV) Verde; erosioni esterne con sterco; una larva di 3 mm.

V) All'esterno: una erosione senza sterco ed una con sterco abbondante; 1 larva di mm. 1 $\frac{1}{2}$. All'interno vaste erosioni e 3 larve: una lunga 1 $\frac{1}{2}$ mm.; un'altra circa 2 mm.; la terza quasi 4 mm. (quest'ultima evidentemente schiusa prima del trattamento).

Complessivamente, nei 5 acini furono dunque trovate: 5 larve lunghe 1 $\frac{1}{2}$ -3 mm. ed 1 di mm. 4.

Acini immersi nell'acqua a 60°:

I) Nero; erosioni esterne non appariscenti; all'interno 2 larve di 1 $\frac{1}{2}$ mm.

II) Nero; grossa erosione e sterco esterno; nessuna larva.

III) Verde; nessuna erosione; nessuna larva.

IV) Verde; piccola erosione con sterco; una larva di 2 mm.

V) Verde; piccola erosione con sterco; una larva di 2 mm.

Nella capsula fu rinvenuta un'altra larva di 2 mm.

In totale, in questi 5 acini si rinvennero: 5 larve di 1 $\frac{1}{2}$ -2 mm.

Acini immersi nell'acqua a 70°:

I) Annerito parzialmente: esternamente sterco e filamenti sericei; all'interno una larva di *Eudemis*, lunga circa 4 mm. (preesistente all'epoca dell'immersione).

II) Verde; nessuna erosione, nessuna larva.

III) Verde; erosione e sterco; all'interno una larva di *Eudemis* di quasi 3 mm.

IV) Verde; erosione e fili sericei; una larva misurante meno di 2 mm.

V) Verde; attaccato con pochi fili sericei al precedente; nessuna larva.

Nei 5 acini, in totale, si rinvennero: 1 larva di circa 2 mm.; 1 di 3 ed 1 di 4 mm. di lunghezza.

Acini immersi nell'acqua a 55° per 10".

I) Molto muffito; erosioni esterne; nessuna larva.

II) Verde; erosione esterna; una larva di circa 3 mm.

III) Verde; abbondante sterco esterno; una larva di *Conchylis* di poco meno di 4 mm. (preesistente al trattamento).

Nei 3 acini: solo 1 larva di 3, ed 1 di 4 mm. di lunghezza.

Acini immersi nell'acqua a 65° per 10":

In nessuno dei 4 acini trattati si rinvennero erosioni o larve.

Nelle prove successive, fatte con acqua meno calcarea, immergendo gli acini nell'acqua a 55° e 65° e togliendoli istantaneamente, ottenemmo gli stessi risultati avuti nelle esperienze precedenti alle medesime temperature, e cioè, riassumendoli:

Dei 9 acini immersi nell'acqua a 55°, all'epoca dell'esame 2 sono ammuffiti, 2 anneriti e gli altri sono rimasti verdi. Vi si trovano 5 larve lunghe 1 $\frac{1}{2}$ -2 mm., e 2 larve lunghe circa 3 mm.

Degli 8 acini immersi nell'acqua a 65°, 2 sono ammuffiti ed 1 nero; gli altri verdi. Vi si trovano 6 larve lunghe mm. 1 $\frac{1}{2}$ -2 $\frac{1}{2}$, ed 1 larva lunga circa 3 mm.

Gli acini che sottoponemmo ad un getto diretto di acqua a 55° dettero i seguenti risultati:

I) Ammuffito; una larva di 2 mm.

II) Parzialmente disseccato; vasta erosione; nessuna larva.

III) Parzialmente nero; erosione esterna; una larva di 2 mm.

IV) Verde; erosione esterna; una larva di 2 mm.

V) Verde; erosione esterna ed interna; una larva di *Eudemis* di quasi 3 mm.

In totale, nei 5 acini, 4 larve di 2-3 mm.

Il 25 agosto raccogliemmo e contammo gli acini guasti ed erosi di una delle viti del filare di *barbera* trattato con l'acqua calda il 21 e il 28 luglio. La vite aveva 21 grappoli, di cui 2 assai piccoli: vi riscontrammo 682 acini guasti od erosi, in cui rinvenimmo 235 larve (202 *Eudemis* e 33 *Conchylis*) (1).

Dati questi risultati e quelli delle prove precedenti, non facemmo ricerche nel filare di *lambrusca* egualmente trattato con l'acqua calda e che si mostrava molto attaccato dalle tignuole.

Esponendo direttamente una larva di *Eudemis* di 7-8 mm. di lunghezza al getto della pompa (temperatura 56-55°), mentre si facevano i trattamenti in campagna, il giorno successivo non mostrava aver sofferto alcun danno.

Concludendo, dalle prove fatte ci sembra poter dedurre che le irrorazioni con sola acqua calda proposte, ad una temperatura tale che non riesca dannosa per la pianta (2), non hanno alcuna o quasi nulla efficacia contro le uova delle tignuole della vite (*Eudemis* e *Conchylis*): risulta molto dubbia l'efficacia contro le larve, le quali, in ogni modo, salvo nei primi momenti dalla schiusura dell'uovo, non potrebbero esser colpite, riparate come sono nei grovigli dei bocci fiorali od entro gli acini; solo un'immersione per 10" nell'acqua a 65° (e probabilmente anche solo a 55°) si è mostrata sufficiente a sterilizzare le uova, ma non vediamo come questo risultato possa aver pratica applicazione.

Patologia vegetale. — *Sopra una nuova malattia dei bambù*(3). Nota di MALUSIO TURCONI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

Una estesa piantagione di bambù dell'Orto botanico di Pavia, ricca di numerose e grosse canne della bella specie *Bambusa mitis* Poir. fu presa, durante l'estate, del 1914, da una grave malattia.

I rami colpiti presentavansi totalmente od in parte secchi, biancastri, cosparsi di numerosissime pustoline nere, rotondeggianti, ovali od allungate nel senso dell'asse del ramo.

I primi sintomi del male si manifestavano su rami d'ogni ordine e grossezza, di preferenza nella parte apicale, specie sui rametti fogliiferi.

Appaiono dapprima delle macchioline o strie bruniccie che poi ingrandiscono e confluiscono insieme formano aree che si estendono anche a più

(1) Per il confronto con le viti testimoni vedasi la nostra precedente Nota sui trattamenti con l'estratto di tabacco.

(2) Da nostre prove risulta che, bagnando bene le foglie con acqua alla temperatura di 65°, si producono scottature sulle foglie giovani e sulle adulte.

(3) Il lavoro in esteso, illustrato con tavola litografata, verrà pubblicato negli Atti dell'Istituto botanico di Pavia ove fu eseguito.

internodii. Le parti malate, da prima brune, gradualmente diventano biancastre e seccano ricoprendosi delle pustoline nere caratteristiche.

Esaminando al microscopio sottili sezioni fatte in corrispondenza di aree infette, si trovano, entro i tessuti, delle ife miceliche ialine, settate, penetranti nelle cavità cellulari che attraversano in tutti i sensi passando per le punteggiature delle membrane. A mettere meglio in evidenza i filamenti micelici, non sempre facilmente discernibili specie nelle aree tuttora brune, possono servire speciali reattivi atti a colorare il micelio ed a chiarificare nel tempo stesso i preparati, quali ad es. quello del Guéguen ⁽¹⁾ (bleu cotton C 4 B di Poirrier sciolto in acido lattico) e quello, più recente, usato dal Klebahn (forte soluzione di bleu cotton CBBBB in lattofenolo) ⁽²⁾.

Con tali reattivi il micelio si colora in bleu intenso e si può allora facilmente seguirne il percorso nelle cellule e nei vasi, ed il passaggio attraverso le punteggiature.

Il male procede di solito dall'apice verso la base dei rami; talora l'infezione resta limitata negli internodii della regione mediana o basale, ed in questi casi la parte del ramo soprastante alla porzione infetta muore e secca senza che in essa compaiano le caratteristiche fruttificazioni del parassita le quali si formano solo nelle parti infette, dopo la loro morte.

Quando il fungo si appresta alla riproduzione, le ife miceliche si ammassano in dati punti sotto l'epidermide ove si intrecciano fittamente a formare degli stromi pseudoparenchimatici che danno luogo a due forme distinte di fruttificazione: una conidica, per trasformazione di interi stromi o di loro porzioni in acervuli melanconiaci; l'altra ascofora per differenziazione di loculi o periteci ascogeni entro la massa stromatica.

Un acervulo conidico evoluto, maturo, presenta uno strato stromatico inferiore, a superficie più o meno concava verso l'esterno e tappezzata da un imenio di conidiofori (basidii) il quale porta numerosissime conidiospore brune che, premendo contro l'epidermide, la sollevano e ne determinano la rottura rimanendo così allo scoperto.

Queste spore sono brune, generalmente globose o globoso-angolose o piriformi, con un diametro di 14-18 μ ; talvolta anche oblunghe elissoidali, lunghe 21-24 μ , larghe 12-14 μ ; presentano un plasma granuloso e quasi sempre una grossa goccia oleosa, e qualche volta due o tre gocce piccole.

Le spore si originano per formazione acrogena all'apice di sporofori ialini o leggermente bruni, settati, lunghi press'a poco quanto il diametro delle conidiospore od anche più (sino al doppio), talora persistenti, attaccati alle

⁽¹⁾ Guéguen F. M., *Sur l'emploi des bleus pour coton e pour laine dans la technique mycologique* [Bull. Soc. myc. de France, XXI (1905) pp. 42-46].

⁽²⁾ Klebahn H., *Beiträge zur Kenntnis der « Fungi imperfecti »*, I [Mycologisch. Centralbl., III (1914), pag. 50].

spore stesse a guisa di pedicello. Le conidiospore germinano emettendo dei budelli micelici, dapprima continui e semplici, di poi settati e ramificantisi.

Questa forma conidica appartiene, pei suoi caratteri morfologici, ai *Deuteromycetes* e va riferita al genere *Melanconium*; essa è la forma di riproduzione più frequente, la sola che trovai durante l'estate e l'autunno.

Frammisti ai numerosissimi acervuli conidici vedevansi anche parecchi stromi con porzioni di già trasformate in acervuli conidiferi e con accenni di formazione di loculi nell'interno, ed alcuni altresì, sempre provenienti dallo stesso micelio, con sola differenziazione di loculi nell'interno della massa stromatica.

Ad inverno avanzato, in materiale esposto all'aperto potei constatare la trasformazione dei loculi in periteci con aschi ed ascospore che giunsero a perfetta maturanza alla fine dell'inverno o durante la primavera successiva.

Uno stroma ascoforo maturo ha allora un colore nerastro e presenta numerosi loculi o periteci globosi, globoso-depressi od ovati, del diametro di 180-200 μ , con ostiolo poco distinto o leggermente protuberante a guisa di papilla, disposti in due o tre serie entro lo stroma. Le pareti dei periteci sono di struttura simile a quella della massa stromatica o distinte solo per una colorazione più scura.

Ogni peritecio contiene numerosi aschi, sorgenti da un imenio basale, cilindraceo-clavati, lunghi 80-100 μ , larghi 22-24 μ , ottusi ed arrotondati all'apice, attenuati verso la base ove terminano in un breve e grosso pedicello; sono frammisti a parafisi filiformi, guttulate, e contengono otto spore ciascuno. Le ascospore sono clavate, attenuate nella parte posteriore, più o meno curve e con un setto vicino alla base, quindi costituite da due cellule disuguali: una piccola inferiore, basale; l'altra soprastante, molto più grande. Sono ialine, a plasma finamente granuloso, con 1 o 2 goccioline nella cellula maggiore e talora una gocciolina anche nella minore; misurano 22-26 μ di lunghezza per 10-12 μ di larghezza.

Per la configurazione degli stromi e pel modo di formazione e disposizione dei loculi o periteci entro lo stroma, questa forma ascofora va riferita al genere *Scirrhia* nelle *Dothideaceae*.

Come dimostrerò nel lavoro definitivo, la forma ascofora ora descritta non può essere identificata con alcuna delle poche specie del genere *Scirrhia* ⁽¹⁾

(1) Le specie di *Scirrhia* fin'ora note non arrivano alla ventina, per la maggior parte riscontrate sopra graminacee e tre sopra bambù: *Scirrhia bambusina* Penz. et Sacc. (Malpighia XI, 1897, pag. 506) trovata sopra culmi morti di *Bambusa* sp. nell'Orto botanico di Buitenzorg; *Sc. luzonensis* P. Henn. (Hedwigia 47, 1909, pag. 256) rinvenuta sopra foglie di *Bambusa* sp. nell'isola di Luzon (isole Filippine); *Sc. seriata* Syd. et Butl. (Ann. mycol. IX, 1911, pag. 402) sopra foglie di *Bambusa* a Moulmein, Burna (Indie orientali).

finora note, dalle quali differisce pei caratteri morfologici degli stromi, degli aschi e delle ascospore, od anche per lo stadio conidico e per la matrice.

Da altre forme affini di ascomiceti pure trovate sopra bambusacee, quali le due specie *Apiospora Montagnei* Sacc. e *Ap. Striola* (Pass.) Sacc. (presentanti un aspetto di *Dothideaceae* del genere *Scirrha*) e la *Scirrhiella curvispora* Speg. ⁽¹⁾, si distingue per la disposizione polistica dei periteci e per differente forma e dimensione tanto degli stromi e dei loculi quanto degli aschi e dello ascospore.

Trattasi quindi di una specie nuova, della quale dò alla forma ascofora il nome di *Scirrha Bambusae* ed a quella conidica (distinta dalle forme già note) il nome di *Melanconium Bambusae*.

Eccone le diagnosi:

SCIRRHA BAMBUSAE n. sp.

Stromatibus ellipsoideo-elongatis, sublinearibus, 1-2 mm. longis, 0,5-1 mm. latis, gregariis quandoque longitrorsum seriatis, tectis, dein rimose erumpentibus, atris; loculis (peritheciis) in quoque stromate numerosis, plerumque bi-triseriatis, subglobosis vel ovatis, 180-200 μ diam., cum stromatis substantia continuis vel vix discretis, ostioli parum perspicuis vel brevissime prominulo-papillatis praeditis; ascis cylindraceo-clavatis 80-100 \cong 20,24 μ , superne obtuse rotundatis infere subattenuatis ac breve crassequ stipitatis, paraphysibus filiformibus, guttulatis obvallatis, octosporis; sporidiis distichis vel oblique monostichis, clavatis, deorsum attenuatis ac plus minusve curvatis, prope basim distincte uniseptatis, ad septum non vel leviter constrictis, granulosis, guttulatis, hyalinis, 20-26 \times 8-12 μ .

Stat. conid. MELANCONIUM BAMBUSAE n. sp.

Acervulis subrotundatis 0,5-1 mm. diam. vel elongatis, 1-2 mm. longis, 0,5-1 mm. latis, sparsis vel dense gregariis ac saepe longitrorsum seriatis, diu tectis, denique erumpentibus, epidermide fissis cinctis; conidiis globosis, globoso-angulosis aut piriformibus, 14-18 μ diam., interdum oblongo-ellipsoideis 21-24 \times 12-14 μ , brunneo-fuligineis, granulosis ac plerumque percrasse uniguttatis, rarius 2-3 guttulatis; conidiophoris dense stipatis, diam. conidiorum subaequantibus vel etiam duplo longioribus, quandoque persistentibus, hyalino-fusculis.

(¹) Unica specie del genere *Scirrhiella* Speg., trovata nel 1883 sopra rami di *Bambusa* presso Carapeguà nel Paraguay. Vedi Spegazzini G., *Funghi guaranitici*, Buenos Aires 1886.

HAB. - In ramulis *Bambusae mitis* atque in culmis ramulisque *Bambusae gracilis* quos valde vexat; in Horto botanico ticinensi.

Che il seccume dei rami della *Bambusa mitis* sia causato dal nuovo micromicete, risulterebbe evidente dalla costante presenza di questo nelle parti malate. Non pertanto ho potuto confermare anche sperimentalmente il parassitismo del nuovo fungo mediante infezioni artificiali sulla *Bambusa mitis* Poir. e sulla *Bambusa gracilis* Hort., colle quali si riprodusse la malattia. Le infezioni furono fatte tanto con micelio ottenuto da spore di colture quanto con conidiospore prese allo stato naturale.

Fisiologia. — *I processi termici dei centri nervosi. I: Metodo di ricerca mediante pile termoelettriche.* Nota di S. BAGLIONI, presentata dal Socio L. LUCIANI⁽¹⁾.

Il fatto che la durata della sopravvivenza del preparato centrale di rana o di rospo dipende, più che quella di ogni altro noto preparato (muscolare, neuromuscolare o glandolare), dalla pressione di ossigeno dell'ambiente, può far sorgere l'ipotesi che nell'attività centrale abbiano luogo processi ossidativi molto intensi. Questa ipotesi può essere sperimentalmente vagliata in due modi: o stabilendo, coll'analisi chimica, la quantità di O₂ consumato e di CO₂ prodotto (come hanno fatto H. Winterstein, V. Scaffidi, R. Usui, R. Unger), o stabilendo l'entità dei processi termici che si svolgono nell'attività centrale.

A quest'ultimo problema ho rivolto, da qualche anno, l'attenzione, dedicando alla sua soluzione, sui centri isolati di rospo, lunghe e laboriose indagini, prima di poter giungere a risultati soddisfacenti.

Per essere il preparato centrale di Bufo un oggetto di piccola mole ed estremamente sensibile a minime compressioni, esso escludeva la possibilità di usare il metodo termometrico diretto; inoltre, per essere squisitamente sensibile alle correnti elettriche, escludeva anche l'applicabilità del metodo bolometrico. Non rimaneva, quindi, che ricorrere al metodo delle pile termometriche, la cui tecnica, d'altra parte, è insidiosa ed irta di grandi difficoltà.

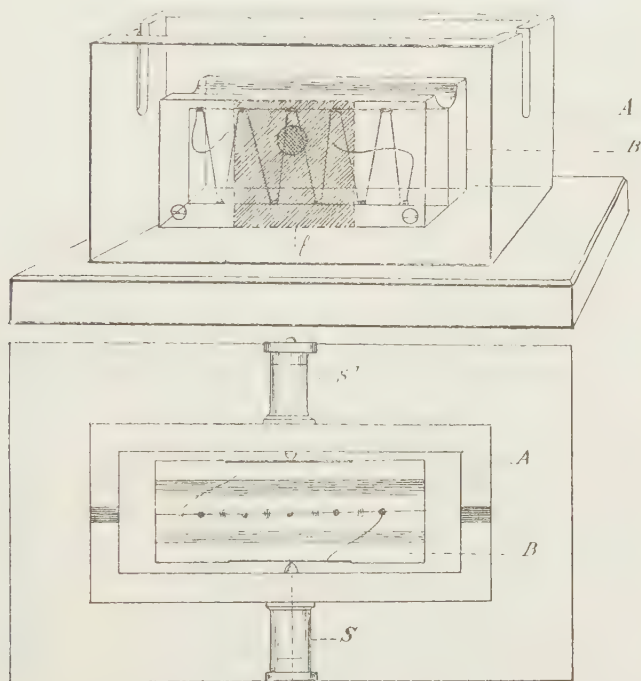
Tralasciando di accennare ai diversi tentativi preliminari e rinviando, per le notizie bibliografiche, alle recenti riviste di O. Frank⁽²⁾ e di K. Bürker⁽³⁾, descriverò il metodo che mi ha fornito i migliori risultati.

(¹) Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Sassari.

(²) O. Frank, *Thermodynamik des Muskels*, Ergebn. d. Physiol. III, 2, (1904), 348-514.

(³) K. Bürker, *Methoden zur Thermodynamik des Muskels*, Tigerstedts Handb. d. physiol. Meth. II, 3, (1908), 1-86. Altre recenti Memorie sulla termodinamica muscolare sono quelle di A. V. Hill, Journ. of Physiol. XL, (1910), 389-403; XLII, (1911), 1-43.

Una cassetтина di ebanite (A), lunga 56 mm., larga 25 e profonda 23, da coprire con un coperchio mobile della stessa materia, recante nel mezzo dei due lati maggiori i due serrafili esterni (S e S'), come si vede nelle annesse figure 1 e 2, serve da camera umida pel preparato centrale e da ricettacolo per la batteria termoelettrica (B). Questa è costituita da tre, o cinque o otto coppie di elementi, formati da saldature di filo di ferro e costantino di 0.2 mm. di spessore, eseguite secondo le indicazioni del Bürker,



FIGG. 1 e 2. — Rappresentano schematicamente in prospettiva e in pianta, a grandezza naturale, l'apparecchio termoelettrico.

poste alla distanza di 3-4 mm. in due serie alterne, l'una sul fondo della doccia destinata a contenere il preparato centrale, e l'altra alla base del blocchetto di ebanite che serve da supporto alla batteria. Questo supporto si compone di due metà simmetriche, tenute insieme da due viti, e attraversate dai due fili metallici della batteria, che vengono a saldarsi colle due lastre laterali di ottone a molla (/), le quali, comprimendo gli estremi interni dei due serrafili della cassetтина, si pongono con essi in contatto chiudendo il circuito. I supporti delle tre batterie di diversa forza elettromotrice sono, quindi, spostabili nell'interno della cassetтина per potersi adattare alla varia lunghezza del preparato, e sostituibili facilmente l'uno all'altro. La

lunghezza di ciascun supporto è di 36 mm., la larghezza di 15, e l'altezza, dagli orli, di 16,5; dal fondo della doccia, di 12.

Per impedire l'ossidazione del filo di ferro, ricoprivo le saldature, e le superfici esposte, dapprima di vaselina purissima, più tardi di vernice di lacca sciolta in alcool.

Come strumento di misura servì un galvanometro di Deprez-D'Arsonval della casa Hartmann e Braun (n. 1356 I del suo catalogo), con una resistenza di 50 ohms del rocchetto mobile principale, e una sensibilità elettrica di circa 0.000000004 amp. per 1 mm. della scala alla distanza di 1 metro. Esso era munito di un braccio, allungabile a 0,5 m., con cannocchiale e scala di 200 mm.

Cercai di sottrarre il circuito esterno alle variazioni termiche della camera (che, del resto, oscillavano al massimo di 1-2° C. nel decorso di 4-5 ore, tra 14 e 16° C., che furono sempre stabilite con un termometro al decimo, posto in immediata vicinanza dell'apparecchio), usando fili con doppio rivestimento isolante, che ricoprii, inoltre, per tutta la loro lunghezza, di uno spesso tubo di caucciù.

La sensibilità termica della batteria termoelettrica di cinque coppie di elementi fu determinata direttamente sei volte, portando successivamente a loro diretto contatto il fondo di due bevute di vetro sottile di Jena, contenenti circa 500 cc. di acqua distillata di temperatura diversa (nell'ambito di circa 0.5 C.), stabilita mediante un termometro Beckmann al centesimo, il cui bulbo pescava in permanenza presso il fondo.

Le sei determinazioni, fatte in due giorni diversi, colle saldature ricoperte di vaselina o di lacca, diedero per risultato:

I.	{	a) per un aumento di 0°.35, uno spostamento di 41 mm. della scala, ossia 1° = 120 mm.										
		b)	"	"	0.31,	"	35	"	"	"	1 = 118	"
		c)	"	"	0.27,	"	33	"	"	"	1 = 122	"
II.	{	d)	"	"	0.78,	"	86	"	"	"	1 = 110	"
		e)	"	"	0.68,	"	75	"	"	"	1 = 110	"
		f)	"	"	0.60,	"	64	"	"	"	1 = 107	"

In media, quindi, ogni millimetro della scala indicava $\frac{1}{110}$ di grado; ma poichè l'intervallo del millimetro, ingrandito dal cannocchiale, permetteva facilmente l'apprezzamento del decimo, la sensibilità termica saliva a $\frac{1}{1100}$ di grado (0°,0009 C.). La batteria di otto coppie aveva, corrispondentemente, una sensibilità termica di $\frac{1}{2000}$ di grado (0°,0005 C.).

Come indica la fig. 3, il preparato centrale di *Bufo* è adagiato nella doccia della batteria, in modo che la faccia ventrale (in qualche esperienza la dorsale) è a contatto con la serie superiore degli elementi termoelettrici. La coda equina e il moncone caudale della colonna vertebrale e del sacro

(spogliato accuratamente da sostanza muscolare) giacciono nell'interno della cassetтина, riposando sull'orlo del supporto della batteria, senza aver contatto diretto con niun elemento termoelettrico. I due nervi sciatici fuoriescono dalla cassetтина attraverso una delle due sottili e profonde scanalature delle due pareti minori, avvolti da batuffolini di ovatta imbevuta di soluzione

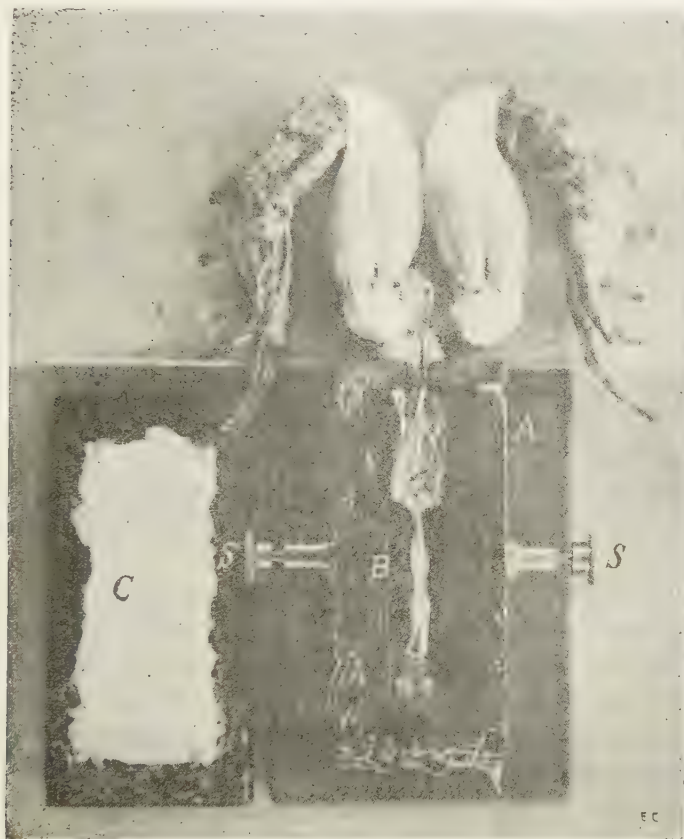


FIG. 3. — Fotografia dall'alto, quasi a grandezza naturale, del preparato centrale posto nell'apparecchio termoelettrico.

fisiologica, che chiudono il vuoto della scanalatura. La scanalatura dell'altra parete è occlusa da membrana di caucciù, per evitare ogni possibile evaporazione. Le zampe e i piedi del preparato sono adagiati su una lastra di vetro, fuori della cassetтина; per cui è facile provocare ed osservare movimenti riflessi. La cassetтина chiudevo poi col coperchio (C) di ebanite, nella cui faccia interna è fissato un doppio strato di carta da filtro imbevuta di H_2O , per saturare di vapore acqueo la camera umida. Gli orli della cassetтина e del coperchio sono, inoltre, spalmati di vaselina.

Sopra tutto il dispositivo ponevo, infine, una spessa campana di vetro. Sperimentalmente potei convincermi che, con le dette precauzioni, la batteria termoelettrica non era influenzata dal calore dell'osservatore, mentre indicava le variazioni termiche del preparato centrale.

In prossime Note riferirò i risultati ottenuti; qui aggiungerò che il metodo, oltre che prestarsi per la ricerca delle variazioni termiche del preparato centrale, mi pare possa rendere buoni servigi anche per indagare le variazioni termiche prodotte da rapidi processi chimici o biochimici, come ad esempio in quelli enzimatici, di coagulazione o precipitazione.

Chimica-fisica. — *Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali*. Nota XI: *Nuove ricerche sulla reazione chimica della bile* ⁽¹⁾, di G. QUAGLIARIELLO, presentata dal Corrisp. FIL. BOTTAZZI.

Alcuni anni or sono, occupandomi della reazione chimica dei liquidi dell'organismo, ebbi a studiare anche la reazione della bile [G. Quagliariello, *Sulla reazione chimica della bile*. Rend. d. R. Acc. dei Lincei. (5) XX, 2° sem., pag. 202 (1911)]. Dai dati allora ottenuti risultò che la bile ha, nel maggior numero dei casi, una reazione neutra, ma che, allontanandosi sempre pochissimo dalla neutralità, può anche presentare una reazione acida o alcalina.

Le ricerche sopra citate furono eseguite su bile raccolta dalla cistifellea di animali recentemente uccisi, onde esse non si riferiscono alla bile quale viene secreta dal fegato.

Ora noi non sappiamo quali modificazioni essa subisce in quel serbatoio, specialmente se vi rimane per parecchio tempo; sappiamo solo che diventa notevolmente più densa. Ma oltre questa perdita di acqua, e anche a causa di essa, possono avvenire altre modificazioni chimiche e fisiche di natura diversa.

È perciò che, avendo avuto occasione di tenere in laboratorio alcuni cani portanti una fistola biliare permanente, ho voluto ripetere su bile fresca le misure della reazione attuale.

La tecnica seguita in queste misure è stata la stessa di quella adoperata nelle precedenti ricerche.

Nella seguente tabella sono riferiti i dati analitici sperimentali:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

TABELLA I.

Dati analitici sulla reazione della bile.

ESPERI- MENTO	DATA	<i>p</i>		<i>q</i>		$\left(\frac{q}{p} \times \pi_n\right)$	log. π	$\frac{\pi}{RT}$	p_n^\bullet	log. $[H^\bullet][H^\bullet] \times 10^7$	<i>Osservazioni</i>
		trovato	corretto	trovato	corretto						
1°	28-II	504,5	504,9	163,5	165,4	0,3338	1,52946	5,745	7,74	8,255	Animale a digiuno da 24 ore.
2°	"	504,5	504,9	175,0	176,9	0,3566	1,55225	6,139	8,14	9,861	Subito dopo il pasto: pane e brodo.
3°	29-III	506,0	506,4	165,0	166,9	0,3358	1,52610	5,730	7,78	8,220	Animale a digiuno da 16 ore.
4°	31-III	506,0	506,4	162,0	163,9	0,3298	1,51822	5,676	7,68	8,324	Animale a digiuno da 24 ore.
5°	7-IV	508,5	508,9	160,1	161,9	0,3244	1,51105	5,713	7,71	8,287	Animale a digiuno da 24 ore.
6°	"	508,5	508,9	166,6	168,5	0,3376	1,52840	5,811	7,81	8,189	Subito dopo il pasto: pane e latte.
7°	10-IV	511,9	512,3	171,0	172,8	0,3421	1,53415	5,888	7,88	8,112	Animale a digiuno da 24 ore.

NB.

— *p* indica la divisione del ponte alla quale l'accumulatore è perfettamente compensato contro un elemento normale Weston;
q indica la divisione del ponte alla quale l'accumulatore è perfettamente compensato contro la pila a concentrazione;
la correzione dei due valori è dovuta al fatto che il filo di platino, lungo 1 metro, che costituisce il ponte di Wheatston, non è perfettamente calibrato;

π indica in volta la forza elettromotrice della pila a gas, costituita dalla bile e dall'acido cloridrico $n/_{100}$;

π_n indica la forza elettromotrice dell'elemento costante: essa è indipendente dalla temperatura ed è eguale a 1,0189 volta;

R indica la costante dei gas e *T* la temperatura assoluta;

p_n^\bullet è il così detto idrogeno esponente, vale a dire il logaritmo negativo della concentrazione degli idrogenioni.

Credo ora utile di istituire un paragone fra questi dati e quelli da me stesso ottenuti sulla bile raccolta dalla cistifellea:

TABELLA II.

Bile raccolta dalla cistifellea:	Bile sgorgante direttamente dal fegato:
$[H^+] \times 10^7$	$[H^+] \times 10^7$
0,657	0,180
0,657	0,073
0,626	0,166
0,129	0,211
0,831	0,194
0,391	0,155
0,547	0,130
2,090	

Risulta da tale confronto:

1) una maggiore costanza dei valori numerici della colonna di destra, che non in quelli della colonna di sinistra;

2) una maggiore corrispondenza dei primi, con la reazione degli altri liquidi dell'organismo (per il sangue di cane fu trovato, in questo Istituto, $[H^+] \times 10^7 = 0,22$);

3) una maggiore alcalinità della bile sgorgante direttamente dal fegato, il che fa supporre che la bile nella cistifellea, specialmente dopo una lunga permanenza, assuma una reazione neutra, e in certi casi tenda addirittura verso l'acidità (vedi ultimo dato della colonna di sinistra).

Dall'esame poi dei miei dati risulterebbe che dopo i pasti l'alcalinità della bile tende ad aumentare. Ma su ciò non insisto, a causa del piccolo numero di esperienze eseguite.

Zoologia. — *Osservazioni morfologiche sulla Recurvaria nanella* Hb. Nota III di ARMANDO MIGNONE, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

In due Note precedenti ⁽¹⁾ abbiamo data la descrizione della *Recurvaria nanella* Hb. nello stadio di adulto. Completiamo ora lo studio dei caratteri morfologici di questa specie di Hübner, descrivendola nello stadio di larva e in quello di crisalide.

LARVA. *Neonata*. È piccolissima. Le prime, comparse sul finire dell'agosto, misuravano mm. 1 o poco più di lunghezza, e intorno a mm. 0,3 di larghezza.

Il colorito, bruno-chiaro (isabellino) tendente al rossiccio sul dorso e ai lati, va sfumando ventralmente in una tinta anche più chiara, mista di colorazione verde.

Il corpo è cosparso di pochi peli ed assottigliato posteriormente. Il capo è quasi della stessa larghezza del corpo e di colorito castagno molto scuro.

Si notano uno scudo protoracico quasi dello stesso colore del capo e una placca (piastra) anale più chiara.

Larva prima dell'ibernamento. Verso il tempo dell'ibernamento (settembre-ottobre) la maggior parte delle larve misurano da mm. 3,5 a mm. 4,5 di lunghezza, e mm. 0.5 a 0.6 di larghezza. Il colorito è marcatamente rosso-bruno (fulvo) con tendenza, in parecchie, al colore vinoso.

Il corpo, cosparso di pochi peli, è assottigliato agli estremi, meno anteriormente che posteriormente.

Il capo è quasi nero e lucido. Lo scudo protoracico e la placca anale si conservano, sono più scuri che nella neonata, ma la placca anale sempre meno dello scudo.

Larva dopo l'ibernamento. Come avemmo occasione di constatare recentemente (16 gennaio e 23 febbraio 1916) con gli allevamenti nei recipienti di vetro e in campagna (dal 23 al 27 febbraio 1916), le dimensioni delle larve subito dopo l'uscita dal bozzolo invernale sono pressochè uguali a quelle precedenti l'ibernamento.

L'accrescimento è però molto rapido; infatti le larve trovate nella prima quindicina di marzo dello scorso anno, avevano già la lunghezza di mm. 6-7 e la larghezza di mm. 0,7-0,8; quelle raccolte nella primavera di quest'anno misuravano: il 5 marzo, mm. 5 di lunghezza e mm. 0,5-0,6

⁽¹⁾ Mignone A., *Osservazioni morfologiche sulla Recurvaria nanella* Hb., Rend. Acc. Lincei, (5), XXV, 1916, 1° sem. pp. 343-349 (Nota I) e pp. 423-428 (Nota II).

di larghezza; il 2 aprile, mm. 7 di lunghezza e mm. 0,7-0,8 di larghezza; il 10 aprile, mm. 8 di lunghezza e mm. 0,7-0,8 di larghezza.

Il colorito è rosso-bruno carico e ricorda quello della ruggine; ma non è costante. Col progredire dell'età, durante la primavera, specialmente nel periodo della fioritura delle piante, le larve assumono coloriti molto diversi.

Nella prima quindicina di marzo si presentano per lo più di colore ferrugineo (bocci florali rosei di pesco e di albicocco), ma si trovano in buona quantità anche di colore aranciato (gemme fogliifere di pesco e di albicocco); se ne trovano in minor numero di colore incarnato (bocci florali di albicocco) e rosso carminio (bocci florali rosei di pesco). Nella seconda quindicina di marzo il colorito predominante delle larve, nei fiori, è il fulvo (pesco, albicocco, ciliegio, pero, melo); per le larve nei germogli fogliiferi prevale invece il colorito isabellino (pesco, albicocco, ciliegio, pero, melo). È facile però trovare larve di altro colorito: verde porro (germogli fogliiferi di pesco, susino, pero, bocci florali di melo), giallo zolfo (bocci florali di pero e melo, germogli fogliiferi di pesco, susino e melo), vinoso (bocci florali rosei di pesco e albicocco).

Queste variazioni di colore non sono soltanto in rapporto col tempo più o meno lungo trascorso dall'uscita delle larve dai ricoveri invernali, cioè con la loro età, ma sono anche in rapporto con il nutrimento. Cosa che abbiamo potuto accertare sperimentalmente. Difatti larve di colore fulvo tolte da fiori rosei di pesco e nutrite con fiori bianchi di pero, hanno assunto parte colorito isabellino e parte colorito nocciola; larve di colore isabellino tolte da fiori rosei di pesco e nutrite con foglie della stessa pianta, sono diventate di colore giallo zolfo; larve di colore isabellino tolte da fiori rosei di pesco e albicocco, ancora nutrite con gli stessi fiori, hanno assunto il colorito vinoso; queste ultime nutrite successivamente con germogli di susino sono diventate di colore giallo zolfo. Tuttavia non vogliamo attribuire a queste nostre osservazioni un valore assoluto e generale, giacchè sulle variazioni potrebbero avere influito anche altre cause (la temperatura p. es.) delle quali non abbiamo tenuto conto, o che potrebbero esserci sfuggite.

Il corpo, cosparso di pochi peli, è assottigliato agli estremi; un po' meno anteriormente. I peli sono circondati, alla base, da un'areola più o meno scura.

Gli autori che più recentemente e meglio si sono occupati dello studio di questa specie [Houghton ⁽¹⁾ 1902; Busck ⁽²⁾ 1903] affermano che le larve

(¹) Houghton J. T., "Contribution to the life-history of *Gelechia (Recurvaria) nanella* Hb., from an economic point of view, Ent. Mo. Mag., Ser. 2^a, vol. XIV (vol. XXXIX), 1903, pp. 219 e 220.

(²) Busck A., *A revision of the American moths of the family Gelechiidae*. Proc. U. S. Nat. Mus., vol. XXV, pp. 767-938, 1903. Description of *Recurvaria crataegella*, pag. 811, riportata da E. W. Scott e J. H. Paine nel U. S. D. A. Bur. Ent. Bull. n. 112, pp. 4 e 5.

dopo l'ibernamento, perdono la placca anale. Noi abbiamo osservato che la placca anale esiste e si mantiene anche nelle larve uscenti in primavera dagli involucri invernali; soltanto, quando le larve si fanno adulte, diventa più chiara assumendo il colorito giallo d'ocra o giallo ambra, ma è sempre evidentissima nè richiede uno sforzo di ricerca. È da notare tuttavia che delle larve con la placca anale scura (color castagno), si trovano ancora, sebbene in numero poco rilevante, nella prima decade di aprile, non molto distante cioè dal tempo in cui avviene l'incrisalidamento.

Lo scudo protoracico si mantiene ben visibile; è di colore castagno molto scuro, quasi nero dorsalmente, gradatamente più chiaro scendendo verso i lati del corpo.

Larva dell'ultima età (fig. 6). Dimensioni: al loro completo sviluppo le larve misurano da 8 a 10 mm. di lunghezza e da 1 a 1,2 mm. di larghezza.

Il corpo è più marcatamente assottigliato agli estremi, ma sempre un po' meno anteriormente.

Colorito. Nelle larve adulte le variazioni di colorito sono meno sensibili: sui germogli fogliiferi e sulle foglie di pesco [*Prunus persica* (L.) Stok.], albicocco (*Prunus armeniaca* L.), susino (*Prunus domestica* L.), ciliegio (*Prunus avium* L.), amarena (*Prunus cerasus* L.), melo (*Pyrus malus* L.), pero (*Pyrus communis* L.), cotogno (*Cydonia vulgaris* Ins.), per lo più le larve hanno colorito rosso carminio-verde, con prevalenza di rosso sul dorso, di verde ventralmente; molte però sono decisamente di colorito verde porro, con tendenza all'isabellino sul dorso (germogli fogliiferi e foglie di susino, ciliegio, melo, pero), altre di colorito nocciola (germogli fogliiferi e foglie di melo e pero), altre infine di colorito vinoso, misto più o meno a colorazione verde porro sul dorso e quasi completamente di questo colore sul lato ventrale (germogli fogliiferi di pero).

Le farfalle che si ottengono da larve di colorito diverso, opportunamente isolate, sono però tutte di aspetto quasi uguale; alcune si presentano, nell'insieme, di un tono più chiaro perchè in esse le macchie nere sono molto sbiadite, quasi brune, mentre nelle altre il nero delle macchie è intensissimo e quindi spiccato nettamente nella tinta grigia di sfondo. Riteniamo però di poter escludere rapporti di dipendenza fra questo fatto e il colorito delle larve, perchè da larve di colore diverso si ottennero costantemente, e quasi con la stessa proporzione, adulti più chiari e adulti più scuri.

Capo nero, con scultura a reticolato irregolare; lunghezza mm. 0,5-0,6; larghezza mm. 0,7-0,8.

Ocelli 6 per lato, disposti tre a tre su due linee ad arco a convessità antero-laterale.

Dal lato dorsale, su ciascun emisfero, assai facilmente visibile anche con la lente, una grossa e lunga setola che si inserisce posteriormente agli

ocelli, ma vicino ad essi, diretta lateralmente, molto sporgente e leggermente piegata ad arco con la convessità rivolta in avanti; 2 setole più corte si trovano anteriormente ad essa, e 3 posteriormente. Altre 2 sono collocate sul margine laterale interno degli emisferi lungo il forte ispessimento chitinoso che li separa dal clipeo.

Sul clipeo, 4 lunghe setole della stessa lunghezza, simmetricamente disposte due da una parte e due dall'altra della linea mediana, e ad uguale distanza da essa. Un'altra setola più lunga sul margine anteriore, lateralmente, sulla linea di divisione del clipeo dagli emisferi.

Antenne brevi, di 3 articoli: il 1° cortissimo e largo; il 2° cilindrico, lungo quanto largo, provvisto all'estremità distale di setola lunghissima (6-7 volte l'articolo), di altra setola molto corta, di due sensilli stiloconici, e, verso la metà dell'articolo, di un sensillo placoideo; il 3° articolo, molto più piccolo dei due primi, inserito sulla metà laterale esterna del 2°, fornito di un processo cilindrico che termina con una setola lunga quasi il doppio di esso, munito di setola corta e di 1 sensillo lungo quanto quelli del 2° articolo, ma più sottile, appendici tutte che si trovano all'apice dell'articolo.

Mandibole con 5 denti: il 2°, cominciando anteriormente, più sviluppato degli altri; il 3°, 4° e 5° decrescenti in altezza e più tozzi; il 1° più sottile e più corto del 2° e 3°. Sono fornite di 2 setole, quasi della stessa lunghezza, inserite lateralmente e verso la base dei due primi denti (una per ciascuno).

Mascelle del 1° paio con lobo breve e un palpo poco più lungo.

Il lobo porta: a) 2 sensilli apicali stiloconici e 2 sensilli chetici pure apicali, costituiti, ciascuno, da una setola conica breve e tozza; b) 1 sensillo placoideo all'estremità distale dell'articolo, in posizione dorso-laterale esterna; c) 2 setole piuttosto lunghe sul margine libero; d) 2 peli corti e delicati, pure marginali.

Il palpo è biarticolato; l'articolo prossimale, grosso e tozzo, porta un sensillo placoideo; quello terminale, sub-cilindrico, è munito, all'estremità, di tre pante brevissime.

L'articolo basale delle mascelle, ben sviluppato, è provvisto di una setola marginale molto lunga, la cui estremità raggiunge e talvolta sorpassa il livello di quelle del lobo.

Labbro inferiore largo, con palpi triarticolati, col 1° articolo corto, grosso, conico; il 2° più lungo ed esile; il 3° cortissimo, terminato da una breve setola. Papilla pilifera nella parte mediana, lunga, leggermente conica.

Labbro superiore largo, con davanti e nel mezzo una profonda insenatura aperta a V, fornito dorsalmente di 5 setole per lato, delle quali 2 anteriori brevi, 3 situate alquanto indietro di quelle: 1 più lunga lateralmente, 1 poco più breve submediana-sublaterale, 1 breve submediana.

Sulla superficie ventrale esistono, per ogni lato, 2 setole spiniformi, brevi e tozze, poco dietro al margine anteriore.

Torace mancante di tubercoli, con scudetto protoracico di colore scuro, molto appariscente, bipartito lungo la linea mediana, dove si nota una striscia chiara a margini frastagliati. I tre segmenti del torace sono presso a poco della stessa grandezza.



FIG. 6. — Larva di *Recurvaria nanella* Hb.
(Ingrandimento: 10 diametri)

Sullo scudetto si contano, per ogni metà, 6 setole, di cui: 2 vicinissime alla linea mediana (1 lunga anteriormente, 1 breve posteriormente); 1 lunga sul margine posteriore verso la metà della sua lunghezza; 3 all'angolo antero-laterale, di cui la più lunga proprio sul vertice e le altre 2, più brevi, vicine ad essa, una sul margine anteriore, l'altra sub-marginale laterale.

Negli altri due segmenti, dorsalmente, vi sono 8 setole disposte in coppie, formate ciascuna da una setola lunga e l'altra corta, tutte su una linea trasversale verso la metà del segmento.

Lateralmente 1 setola lunga accompagnata da 2 molto più corte nel primo segmento, accompagnata da 1 sola negli altri due.

Ventralmente, ogni segmento toracico porta 6 setole disposte simmetricamente rispetto alla linea mediana: 2, cortissime, situate presso il margine anteriore; altre 2, pure corte, nel mezzo e molto prossime alla linea mediana; 2, lunghe, più indietro e più di tutte le altre distanti dalla linea mediana. Nel 1° segmento toracico possono mancare le 2 setole corte anteriori; viceversa, lateralmente, invece di una sola setola, ve ne può essere una coppia.

Zampe nere di 3 articoli, che poggiano su uno zoccolo di 2 articoli.

L'articolo basale dello zoccolo è largo e piatto, munito di lunghe setole (6-7) distribuite lungo la metà ventrale del margine distale; il 2° articolo dello zoccolo, molto più piccolo e sottile, porta 3 setole corte, pur esse sul suo margine distale.

Dei tre articoli delle zampe, il primo, impiantato sullo zoccolo, è lungo quanto largo, con 2 lunghe setole ventrali al margine distale; il 2° ha forma conica ed è provvisto di almeno 6 setole disposte in giro sulla metà distale; il 3°, marcatamente conico, porta, dal lato ventrale, 2 peli abbastanza lunghi con l'estremità talvolta piegata ad uncino, e dorsalmente un altro pelo corto e diritto; inoltre all'apice porta un tubercolo tricuspido e una setola piatta ensiforme.

Il pretarso è costituito dal solo uncino.

Addome di 10 segmenti; pseudozampe brevi, con uncinetti a corona in numero variabile (da 22 a 28), sul 3°, 4°, 5°, 6° e 10° segmento. Esse sono tutte provviste di rinforzo chitinoso, particolarmente sviluppato sulla superficie esterna di quelle del 10° segmento.

Anche l'addome manca di tubercoli e, a differenza del torace, ogni segmento porta, oltre alle ventrali, soltanto 6 setole dorsali e 2 laterali.

La disposizione delle setole dorsali differisce pure da quella dei segmenti toracici. Abbiamo cioè 1 setola per parte, lunga, situata anteriormente e molto distante dalla linea mediana; poi 2 coppie (una per parte) di setole più vicine ad essa e disuguali in lunghezza, disposte in senso longitudinale con la più corta innanzi.

Il penultimo segmento addominale porta anch'esso 6 setole, ma disposte in senso trasversale, in due gruppi di tre ciascuno, uno da una parte e uno dall'altra.

Le due setole laterali sporgono esternamente; una di esse è piuttosto lunga, l'altra è breve.

L'ultimo segmento porta la placca anale, di colorito ocroleuco, o giallo d'ocra, o giallo ambra, di forma che ricorda l'esagonale, con 8 setole disposte simmetricamente, 4 da una parte e 4 dall'altra della linea mediana; di esse, 3 sono molto lunghe e laterali, 1 corta submediana.

Posteriormente l'addome termina con una serie di 6 (possono anche essere 8) spine disposte simmetricamente rispetto alla linea mediana e sotto la placca anale. Le 2 di mezzo sono caratteristiche perchè molto robuste,

con la base assai allargata e l'apice acuminato, incurvate, con le convessità rivolte verso la linea mediana, così che gli apici si incrociano. Da ciascun lato seguono altre 2 e qualche volta anche 3 spine simili alle prime, ma assai più piccole.

Anteriormente a queste spine vi è una zona provvista di altre spine chitinoze minutissime.

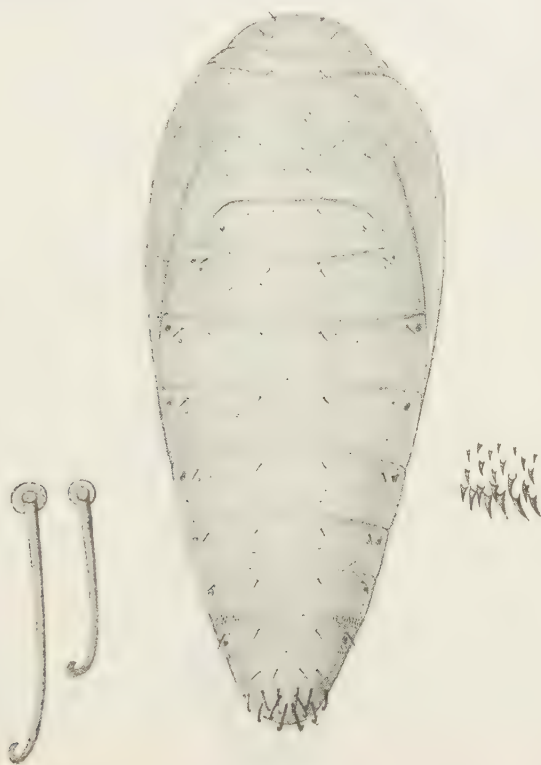


FIG. 7. — Crisalide di *Recurraria nanella* Hb. vista dal dorso.
(Ingrandimento: 23 diametri)

Passiamo alla superficie ventrale. Quivi le setole sono in numero di 6 nei primi due segmenti e nel 7° ed 8°; esse sono piuttosto lunghe ed allineate trasversalmente. Oltre a queste, ve ne possono essere altre più corte.

Il 3°, 4°, 5° e 6° segmento sono provvisti, per ogni metà, di 5 setole, di cui 3 a breve distanza l'una dall'altra in linea obliqua vicino al margine esterno delle pseudozampe; 1 isolata vicino al loro margine interno e alla linea mediana; 1, la più lunga, pure isolata in posizione posteriore sublaterale.

Sul 9° segmento vi sono soltanto 4 setole allineate trasversalmente. L'ultimo segmento porta, per ogni metà, 5 setole, di cui 3 quasi sulla linea d'inserzione della pseudozampa e 2 anteriormente ad esse.

CRISALIDE (fig. 7 e fig. 8). Ha forma ovulare allungata, arrotondata anteriormente.

Il colorito è giallo d'ocra, qualche volta giallo ambra, qualche volta paglierino; verso il tempo della schiusura diviene gradatamente bruno carico.

È lunga mm. 4-4,5 e larga intorno a mm. 1,5.

Lascia vedere, in pronazione, il capo e il pronoto. Alla superficie la chitina presenta, in molti punti, delle zone con minutissime spine. Un



FIG. 8. — Crisalide di *Recurvaria nanella* Hb. vista dal ventre.

(Ingrandimento: 28 diametri)

gruppo di queste spine è rappresentato a forte ingrandimento nella figura 7, a destra della crisalide. Di tali zone sono caratteristiche e facilmente visibili quelle del 7° ed 8° segmento addominali, perchè hanno le spine più grosse e costituiscono come una fascia intorno al margine posteriore di essi, molto larga sui lati e gradatamente più sottile verso la linea mediana tanto del dorso quanto del ventre. La zona esistente nel 7° segmento è sempre molto più vistosa di quella dell'8°.

L'ultimo segmento addominale presenta tracce di divisione in 3 segmenti minori; di questi, il posteriore è munito, dorsalmente, di 12 setole abbastanza lunghe, simmetricamente disposte rispetto alla linea mediana e piegate

ad uncino all'estremo. Di queste setole uncinate, le 2 posteriori e più vicine alla linea mediana sono anche le più lunghe e robuste. Nella figura 7, a sinistra della crisalide, sono rappresentate a forte ingrandimento una delle due setole posteriori più lunghe e robuste e una delle altre dieci. La proporzione nelle dimensioni, risultante dal disegno, è identica a quella che esse hanno realmente.

Dal lato ventrale l'ultima porzione del segmento terminale porta 10 setole brevi e dritte disposte su due linee: la posteriore con 6 setole, l'anteriore con 4.

Tutti i segmenti sono provvisti dorsalmente di 4 setole molto corte; fanno eccezione il primo segmento addominale che ne ha soltanto 2, e la porzione terminale dell'ultimo segmento che, come abbiamo detto, porta le setole ad uncino.

Anche ventralmente il numero delle setole è costante, ma varia da segmento a segmento.

Circa la disposizione delle setole, tanto dorsali quanto ventrali, si osservino le figure 7 e 8.

Meccanica. — *Sulle distorsioni di un cilindro elastico due volte connesso.* Nota della sig^{na} ELEONORA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Chimica. — *Ricerche sulle combinazioni subalogenate di alcuni elementi. Sui composti subalogenati del bismuto del tipo BiX.* Nota di L. MARINO e R. BECARELLI, presentata dal Socio NASINI.

Chimica. — II: *Sui borati. Sistema $\text{Na}_2\text{O}-\text{B}_2\text{O}_3-\text{H}_2\text{O}$ a 60°.* III: *Sui borati. Sistema $(\text{NH}_4)_2\text{O}-\text{B}_2\text{O}_3-\text{H}_2\text{O}$ a 30°.* Note di U. SBORGI e F. MECACCI, pres. dal Socio NASINI.

Chimica fisiologica. — *Sull'enzima glicolitico del sangue.* I: *Sull'attività glicolitica del sangue dopo circolazione nel pancreas isolato.* II: *Sull'attività glicolitica del sangue dopo circolazione nell'intestino isolato.* Note del dott. U. LOMBROSO, pres. dal Socio LUCIANI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Chimica fisiologica. — *Sintesi del guanidotripeptide glicociamilglicilglicina*. Nota del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Corrispondente Lo MONACO.

Chimica fisiologica. — *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia*. III: *Ricerca dell'arginasi mediante la microtitolazione alla formaldeide*. Nota del dott. A. CLEMENTI, presentata ID.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio PIROTTA, a nome anche del Corrisp. BACCARINI, relatore, legge una Relazione colla quale si propone l'inserzione nei volumi accademici, della Memoria del dott. GUIDO PAOLI, intitolata: *Risultati botanici della Missione scientifica Stefanini-Paoli nella Somalia italiana meridionale*.

La proposta della Commissione esaminatrice, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando una *Guida allo studio della storia delle matematiche* del Corrispondente GINO LORIA; un volume degli Atti della spedizione norvegese del 1902-1903 per lo studio dell'aurora polare, contenente una relazione del BIRKELAND, *Sulle cause delle burrasche magnetiche e sulla origine del magnetismo terrestre*; e il vol. 5° della opera di BUNZÒ AYATA: *Icones plantarum Formosanarum*.

Il Presidente BLASERNA richiama l'attenzione dei Colleghi sul vol. VII della pubblicazione di S. M. il RE, *Corpus Nummorum Italicorum*; volume fatto inviare in dono all'Accademia da S. M. e che riguarda il Veneto (*Venezia — Parte I — Dalle origini a Marino Grimani*).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 aprile 1916.

BIRKELAND KR. — The Norwegian aurora polaris Expedition, 1902-1903, vol. I, Christiania, 1908. 4°.

BUNZO HYATA. — Icones plantarum Formosanarum nec non et contributiones ad floram Formosanam, vol. V, Taihoku, 1915. 8, pp. i-vi 1-358.

LORIA G. — Guida allo studio della Storia delle matematiche, Milano, 1916. 12°, pp. i-xvi, 1-228.

MALENOTTI E. — Diaspiti raccolti nella Somalia italiana meridionale. (Estr. dal « Redia », vol. XI, pp. 321-358). Firenze, 1916, 8°.

MALENOTTI E. — Specie nuove e critiche di Diaspiti. (Estr. dal « Redia », vol. XI, pp. 309-320). Firenze, 1916. 8°.
